Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
18.07.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 68:

Wir arbeiten den Folgenden Plan ab:

- Es ist $\frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{Im} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x} =: f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die einzige isolierte Singularität von $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $z_0 := 0$.

- Aus HM1 ist bekannt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$ konvergiert und folglich gilt für seinen Wert (Grenzen dürfen symmetrisch gewählt werden)

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

- Sei $R > \pi$. Wegen der Linearität des Integrals gilt

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{-R}^{-\pi} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{R} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

  Es ist $\frac{\sin(x)}{x} > 0$ für alle $|x| < \pi$. Nach dem Satz über die Monotone Konvergenz (vgl. Abschnitt 19.4) der Vorlesung gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{\rho \to 0} \left(\int_{-\pi}^{-\rho} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\rho}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x \right).$$

- Seien nun für den Augenblick $R > \pi > \rho$ fest gewählt. Dann gilt

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\rho}^{R} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma_1} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z \right)$$

  mit $\gamma_1 : [-R, -\rho] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_1(t) = t$, sowie $\gamma_2 : [\rho, R] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_2(t) = t$.

- Wir schließen nun den Weg im Komplexen durch

$$\begin{aligned} \gamma_\rho : [0, \pi] \to \mathbb{C} \quad \gamma_\rho(t) &= \rho e^{\mathrm{i}(\pi - t)}, \\ \gamma_3 : [0, S] \to \mathbb{C} \quad \gamma_3(t) &= R + \mathrm{i}t, \\ \gamma_4 : [-R, R] \to \mathbb{C} \quad \gamma_4(t) &= \mathrm{i}s + t, \\ \gamma_5 : [0, S] \to \mathbb{C} \quad \gamma_5(t) &= -R + \mathrm{i}(s - t) \end{aligned}$$

  ab, mit einem bisher freien Parameter $S > \rho$.

- Der Weg $\gamma_1+\gamma_\rho+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5$ ist einfach, geschlossen und schließt keine isolierten Singularitäten von f ein. Folglich gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = -\left(\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\mathrm{d}z\right).$$

- Wir schätzen die Integrale über γ_j mit $j \in \{3,4,5\}$ mit der Standardabschätzung

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma)\max\{|f(z)| : z \in \gamma([a,b])\}$$

aus Abschnitt 22.5 des Skriptes ab zu

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq S \max_{t\in[0,S]}\left|\frac{e^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}t)}}{R+\mathrm{i}t}\right| \leq S \max_{t\in[0,S]}\frac{e^{-t}}{R} \leq \frac{S}{R},\\
\left|\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq 2R \max_{t\in[-R,R]}\left|\frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}S-t)}}{\mathrm{i}S-t}\right| \leq 2R\frac{e^{-S}}{S},\\
\left|\int_{\gamma_5} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq S \max_{t\in[0,S]}\left|\frac{e^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}(S-t))}}{R+\mathrm{i}(S-t)}\right| \leq S \max_{t\in[0,S]}\frac{e^{t-S}}{R} \leq \frac{S}{R}
\end{aligned}$$

ab. Mit der Wahl $S=\sqrt{R}$ folgt demnach

$$\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z, \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z, \int_{\gamma_5} f(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Es bleibt das Integral $-\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z$ im Limes $\rho \to 0$ zu bestimmen. Es gilt

$$-\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^\pi e^{\mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}t}}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^\pi e^{-\rho\sin(t)+\mathrm{i}\rho\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

Der Betrag des Integranden

$$\left|e^{-\rho\sin(t)+\mathrm{i}\rho\cos(t)}\right| = e^{-\rho\sin(t)} \leq 1$$

ist über $[0,\pi]$ beschränkt. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz (vgl. Abschnitt 19.4 der Vorlesung) gilt deshalb

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^\pi e^{-\rho\sin(t)+\mathrm{i}\rho\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \lim_{\rho\to 0} e^{-\rho\sin(t)+\mathrm{i}\rho\cos(t)}\mathrm{d}t = \pi.$$

- Damit gilt zusammenfassend

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x\right) = \lim_{R\to 0}\mathrm{Im}\left(\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right)\\
&= -\mathrm{Im}\left(\lim_{R\to 0}\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\mathrm{d}z\right)\\
&= -\mathrm{Im}\left(\left[\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z\right] + \lim_{R\to 0}\left[\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\mathrm{d}z\right]\right)\\
&= -\mathrm{Im}\left(\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} f(z)\mathrm{d}z\right) = \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 69:
Wir arbeiten den Folgenden Plan ab:

- Für alle $x + \mathrm{i}y = z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+\mathrm{i}y} + e^{-x-\mathrm{i}y}}{2} = \frac{e^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) + e^{-x}(\cos(y) - \mathrm{i}\sin(y))}{2} \\ &= \cos(y)\cosh(x) + \mathrm{i}\sin(y)\sinh(x)\end{aligned}$$

  Folglich ist

$$\begin{aligned}\cosh(x + \mathrm{i}y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\cos(y)\cosh(x) = 0) \wedge (\sin(y)\sinh(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (\cos(y) = 0) \wedge ((\sin(y) = 0) \vee (\sinh(x) = 0)) \\ &\Leftrightarrow \quad (\cos(y) = 0) \wedge (\sinh(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = 0) \wedge \left(y \in \pi\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)\right).\end{aligned}$$

  Deshalb ist $f : \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z)\frac{1}{\cosh(z)}$ holomorph und $\mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$ ist genau die Menge der Isolierten Singularitäten von f.

- Für den Integranden gilt $\frac{1}{\cosh(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x.$$

- Sei für den Augenblick $R > 0$ fest gewählt. Dann gilt

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z,$$

  mit dem Weg $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma_1(t) = t$ für alle $t \in [-R, R]$.

- Wir schließen nun den Weg im Komplexen durch

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C} \quad \gamma_2(t) &= R + \mathrm{i}t, \\ \gamma_3 : [-R, R] \to \mathbb{C} \quad \gamma_3(t) &= \mathrm{i}\pi - t, \\ \gamma_4 : [0, \pi] \to \mathbb{C} \quad \gamma_4(t) &= -R + \mathrm{i}(\pi - t)\end{aligned}$$

  ab.

- Der Weg $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ ist einfach, geschlossen und positiv orientiert. Er schließt genau eine isolierte Singularität $z_0 := \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$ von f ein. Folglich gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, z_0) - \left(\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z\right).$$

- Wir schätzen die Integrale über γ_j mit $j \in \{2, 4\}$ mit der Standardabschätzung

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma)\max\{|f(z)| : z \in \gamma([a, b])\}$$

aus Abschnitt 22.5 des Skriptes ab zu

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq \pi \max_{t\in[0,\pi]}\left|\frac{2}{e^{R+\mathrm{i}t}+e^{-R-\mathrm{i}t}}\right| \leq \frac{2\pi}{e^R-e^{-R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0,\\
\left|\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq \pi \max_{t\in[0,\pi]}\left|\frac{2}{e^{-R+\mathrm{i}(\pi-t)}+e^{-(-R+\mathrm{i}(\pi-t)}}\right| \leq \frac{2\pi}{e^R-e^{-R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

- Wegen
$$\cosh(\mathrm{i}\pi+t)=\frac{e^{\mathrm{i}\pi+t}+e^{-\mathrm{i}\pi-t}}{2}=\frac{-e^t-e^{-t}}{2}=-\cosh(t)$$
für alle $t\in\mathbb{R}$, gilt
$$\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z=-\int_{-R}^{R}\frac{1}{\cosh(\mathrm{i}\pi-t)}\mathrm{d}t=\int_{-R}^{R}\frac{1}{\cosh(t)}\mathrm{d}t=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$
Damit ergibt sich
$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,z_0)-\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z\right)\xrightarrow{R\to\infty}\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,z_0).$$

- Wegen $\cosh'(z)=\sinh(z)$ für alle $z\in\mathbb{C}$ und
$$\sinh(z_0)=\sinh\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2}=\mathrm{i}\neq 0,$$
folgt nach Abschnitt 22.13 (b) des Skriptes
$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{\cosh'(z_0)}=\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}.$$

- Zusammenfassend ergibt sich
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x=\pi.$$

Aufgabe 70:

(a) Da f_1 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_1)=0$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Für $k=0$ ist
$$\alpha_0(f_1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(0\cdot t)f_1(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2a\pi}\int_{-a}^{a}1\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi},$$
während für $k\in\mathbb{N}$
$$\alpha_k(f_1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\cdot t)f_1(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2a\pi}\int_{-a}^{a}\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{1}{2ak\pi}\left[\sin(kt)\right]_{t=-pi}^{t=\pi}=\frac{\sin(ak)}{ak\pi}$$
gilt.

Da für jedes $t_0\in(-\pi,\pi]$ die Grenzwerte
$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0+} f_1(t) &=: f_1(t_0)+,\\
\lim_{t\to t_0-} f_1(t) &=: f_1(t_0)-,\\
\lim_{h\to 0+}\frac{f_1(t_0+h)-f_1(t_0)+}{h} &=: f_1'(t_0)+,\\
\lim_{h\to 0-}\frac{f_1(t_0+h)-f_1(t_0)-}{h} &=: f_1'(t_0)-
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_1(t_0)+)+(f_1(t_0)-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ die Funktion f_1 dar, da f_1 dort stetig ist. Für $t_0 \in \{-a, a\}$ gilt

$$\lim_{N\to\infty}(S_N f_1)(t_0) = \frac{(f_1(t_0)+) + (f_1(t_0)-)}{2} = \frac{1}{4a}.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei $-a$ und a ist.

(b) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\begin{aligned}
\alpha_0(f_2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(0\cdot t)f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(t)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left([\sin(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - [\sin(t)]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi}\right) = \frac{4}{\pi}.
\end{aligned}$$

Für $\alpha_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\int \underbrace{\cos(t)}_{u'}\underbrace{\cos(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t = \sin(t)\cos(kt) + k\int\sin(t)\sin(kt)\mathrm{d}t$$

Für $k = 1$ ist also

$$\int\cos^2(t)\mathrm{d}t = \sin(t)\cos(t) + \int 1-\cos^2(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int\cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right),$$

für $k > 1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$\begin{aligned}
\sin(t)\cos(kt) + k\int\underbrace{\sin(t)}_{u'}\underbrace{\sin(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t &= \sin(t)\cos(kt) + k\left(-\cos(t)\sin(kt) + k\int\cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\right)\\
\Rightarrow \int\cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t &= \frac{1}{1-k^2}\left(\sin(t)\cos(kt) - k\cos(t)\sin(kt)\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt dann für jedes $k > 1$

$$\begin{aligned}
\alpha_k(f_2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(t)|\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(t)|\cos(kt)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{2}{\pi(1-k^2)}\left([\sin(t)\cos(kt) - k\cos(t)\sin(kt)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin(t)\cos(kt) - k\cos(t)\sin(kt)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2}{\pi(1-k^2)}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{4}{\pi(1-k^2)}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } k = 4m-3\\ \frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k = 4m-2\\ 0 & \text{für } k = 4m-1\\ \frac{-4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k = 4m \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Wegen $1 = 4 - 3$ und

$$\begin{aligned} \alpha_1(f_2) &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[t + \sin(t)\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \left[t + \sin(t)\cos(t)\right]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi} = 0 \end{aligned}$$

gilt die obige Formel für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0+} f_2(t) &=: f_2(t_0)+, \\ \lim_{t \to t_0-} f_2(t) &=: f_2(t_0)-, \\ \lim_{h \to 0+} \frac{f_2(t_0 + h) - f_2(t_0)+}{h} &=: f_2'(t_0)+, \\ \lim_{h \to 0-} \frac{f_2(t_0 + h) - f_2(t_0)-}{h} &=: f_2'(t_0)- \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_2(t_0)+)+(f_2(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2, wegen $f_2(\pi) = \lim_{t \to -\pi+} f_2(t) = 1$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_2)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist $\widehat{f_2} \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_4))_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

(c) Da f_3 eine ungerade Funktion ist, ist $\alpha_k(f_3) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\beta_k(f_3)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\sinh(t)}_{u'}\underbrace{\sin(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t &= \cosh(t)\sin(kt) - k\int \underbrace{\cosh(t)}_{u'}\underbrace{\cos(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \\ &= \cosh(t)\sin(kt) - k\sinh(t)\cos(kt) - k^2\int \sinh(t)\sin(kt)\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int \sinh(t)\sin(kt)\mathrm{d}t &= \frac{1}{1+k^2}\left(\cosh(t)\sin(kt) - k\sinh(t)\cos(kt)\right). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \beta_k(f_3) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)f_3(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kt)\sinh(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi(1+k^2)}\left[\cosh(t)\sin(kt) - k\sinh(t)\cos(kt)\right]_0^{\pi} = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}k}{1+k^2}. \end{aligned}$$

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0+} f_3(t) &=: f_3(t_0)+, \\ \lim_{t \to t_0-} f_3(t) &=: f_3(t_0)-, \\ \lim_{h \to 0+} \frac{f_3(t_0 + h) - f_3(t_0)+}{h} &=: f_3'(t_0)+, \\ \lim_{h \to 0-} \frac{f_3(t_0 - h) - f_3(t_0)-}{h} &=: f_3'(t_0)+ \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_3(t_0)+)+(f_3(t_0)-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]\backslash\{\pi\}$ die Funktion f_3 dar, da f_3 dort stetig ist. Für $t_0 = \pi$ gilt

$$\lim_{N\to\infty}(S_N f_3)(t_0) = \frac{\sinh(\pi) + \sinh(-\pi)}{2} = 0.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei π ist.

(d) Es gilt

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}\sin^2(t)+\frac{1}{2}\sin^2(t) = \frac{1}{2}\sin^2(t)+\frac{1}{2}(1-\cos^2(t)) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos^2(t)-\sin^2(t)) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, folgt durch Koeffizientenvergleich, dass $\beta_k(f_4) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_0(f_4) = 1$, $\alpha_1(f_4) = 0$, $\alpha_2(f_4) = -\frac{1}{2}$, sowie $\alpha_k(f_4) = 0$ für alle $k > 2$.

Da in diesem Fall die Fourier-Reihe eine endliche Summe ist, konvergiert sie überall (gleichmäßig) gegen f_4.

Aufgabe 71:

(a) Da f_1 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\alpha_0(f_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(0\cdot t)\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Für $\alpha_k(f_1)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{u'}\underbrace{\cos(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \quad = \quad -\cos(t)\cos(kt) - k\int\cos(t)\sin(kt)\mathrm{d}t.$$

Für $k = 1$ ist also

$$\int\sin(t)\cos(kt)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos^2(t),$$

für $k > 1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$\begin{aligned}
-\cos(t)\cos(kt) - k\int\underbrace{\cos(t)}_{u'}\underbrace{\sin(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \quad &= \quad -\cos(t)\cos(kt) - k\left(\sin(t)\sin(kt) - k\int\sin(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\right)\\
\Rightarrow \int\sin(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \quad &= \quad \frac{1}{k^2-1}\left(\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt)\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_k(f_1) \quad &= \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)f_1(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)\sin(t)\mathrm{d}t\\
&= \quad \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\left[\cos^2(t)\right]_{t=0}^{t=pi} = 0 & \text{für } k = 1,\\ \frac{2}{\pi(k^2-1)}\left[\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^k}{k^2-1} & \text{für } k > 1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0+} f_1(t) &=: f_1(t_0)+, \\
\lim_{t \to t_0-} f_1(t) &=: f_1(t_0)-, \\
\lim_{h \to 0+} \frac{f_1(t_0+h) - f_1(t_0)+}{h} &=: f_1'(t_0)+, \\
\lim_{h \to 0-} \frac{f_1(t_0-h) - f_1(t_0)-}{h} &=: f_1'(t_0)+
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_1(t_0)+)+(f_1(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_1, wegen $f_1(\pi) = \lim_{t \to -\pi+} f_1(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourier-reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_1 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_1)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist $\widehat{f_1} \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_1))_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

(b) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\alpha_0(f_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_2(t) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(t) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} [\sinh(t)]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}.$$

Für $\alpha_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\cosh(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_{v} \mathrm{d}t &= \sinh(t)\cos(kt) + k \int \underbrace{\sinh(t)}_{u'} \underbrace{\sin(kt)}_{v} \mathrm{d}t \\
&= \sinh(t)\cos(kt) + k\cosh(t)\sin(kt) - k^2 \int \cosh(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int \sinh(t)\cos(kt)\mathrm{d}t &= \frac{1}{k^2+1} \left(\sinh(t)\cos(kt) + k\cosh(t)\sin(kt)\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_k(f_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) f_2(t) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt)\cosh(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi(k^2+1)} [\sinh(t)\cos(kt) + k\cosh(t)\sin(kt)]_0^{\pi} = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2+1}.
\end{aligned}$$

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0+} f_2(t) &=: f_2(t_0)+, \\
\lim_{t \to t_0-} f_2(t) &=: f_2(t_0)-, \\
\lim_{h \to 0+} \frac{f_2(t_0+h) - f_2(t_0)+}{h} &=: f_2'(t_0)+, \\
\lim_{h \to 0-} \frac{f_2(t_0-h) - f_2(t_0)-}{h} &=: f_2'(t_0)+
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_2(t_0)+)+(f_2(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2, wegen $f_2(\pi) = \lim_{t\to-\pi+} f_2(t) = \cosh(\pi)$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_2)| \leq \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist $\widehat{f_2} \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_2))_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.

(c) Da f_3 eine ungerade Funktion ist, ist $\alpha_k(f_3) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit partieller Integration vorbereitend zwei Stammfunktionen

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{t}_{v} \underbrace{\sin(kt)}_{u'}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{k} t\cos(kt) + \frac{1}{k}\int \cos(kt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k} t\cos(kt) + \frac{1}{k^2}\sin(kt), \\
\int \underbrace{t^2}_{v} \underbrace{\sin(kt)}_{u'}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{k} t^2\cos(kt) + \frac{2}{k}\int \underbrace{t}_{v} \underbrace{\cos(kt)}_{u'}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k} t^2\cos(kt) + \frac{2}{k^2} t\sin(kt) - \frac{2}{k^2}\int \sin(kt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k} t^2\cos(kt) + \frac{2}{k^2} t\sin(kt) + \frac{2}{k^3}\cos(kt).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\beta_k(f_3) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) f_3(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kt)t(\pi - t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} t\sin(kt)\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\sin(kt)\mathrm{d}t \\
&= 2\left[-\frac{1}{k}t\cos(kt) + \frac{1}{k^2}\sin(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k}t^2\cos(kt) + \frac{2}{k^2}t\sin(kt) + \frac{2}{k^3}\cos(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{2\pi}{k} + (-1)^k\frac{2\pi}{k} + \frac{4\pi}{k^3}(1 - (-1)^k) = 8\pi\frac{1 - (-1)^k}{2k^3}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0+} f_3(t) &=: f_3(t_0)+, \\
\lim_{t\to t_0-} f_3(t) &=: f_3(t_0)-, \\
\lim_{h\to 0+} \frac{f_3(t_0+h) - f_3(t_0)+}{h} &=: f_3'(t_0)+, \\
\lim_{h\to 0-} \frac{f_3(t_0-h) - f_3(t_0)-}{h} &=: f_3'(t_0)+
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_3(t_0)+)+(f_3(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_3, wegen $f_3(\pi) = \lim_{t\to-\pi+} f_3(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_3 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_1)| \leq \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty,$$

ist $\widehat{f_3} \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_3))_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.

(d) Berechne zunächst die komplexen Fourier-Koeffizienten von f_4. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_4(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{bt} e^{-\mathrm{i}kt} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b - \mathrm{i}k} \left[e^{(b-\mathrm{i}k)t} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{b - \mathrm{i}k} \frac{e^{(b-\mathrm{i}k)\pi} - e^{-(b-\mathrm{i}k)\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{b - \mathrm{i}k} \frac{e^{b\pi} \overbrace{e^{\mathrm{i}k\pi}}^{=(-1)^k} - e^{-b\pi} \overbrace{e^{-\mathrm{i}k\pi}}^{=(-1)^k}}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sinh(b\pi) \frac{(-1)^k}{b - \mathrm{i}k} = \sinh(b\pi) \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^k \frac{b + \mathrm{i}k}{b^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

Für die reellen Fourier-Koeffizienten gilt nach Vorlesung

$$\alpha_k(f_4) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{\widehat{f}_4(k) + \widehat{f}_4(-k)}{2} \right), \qquad \beta_j(f_4) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left(\frac{\widehat{f}_4(-j) - \widehat{f}_4(j)}{2} \right)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$\alpha_0(f_4) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi b}, \quad \alpha_k(f_4) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^k b}{b^2 + k^2}, \text{ sowie } \quad \beta_k(f_4) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{k+1} k}{b^2 + k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0+} f_4(t) &=: f_4(t_0)+, \\
\lim_{t \to t_0-} f_4(t) &=: f_4(t_0)-, \\
\lim_{h \to 0+} \frac{f_4(t_0 + h) - f_4(t_0)+}{h} &=: f_4'(t_0)+, \\
\lim_{h \to 0-} \frac{f_4(t_0 - h) - f_4(t_0)-}{h} &=: f_4'(t_0)+
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_4(t_0)+) + (f_4(t_0)-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi] \setminus \{\pi\}$ die Funktion f_4 dar, da f_4 dort stetig ist. Für $t_0 = \pi$ gilt

$$\lim_{N \to \infty} (S_N f_4)(t_0) = \frac{e^{b\pi} + e^{-b\pi}}{2}.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei π ist.

Aufgabe 72:

(a) Nach Aufgabe 70 (b) gilt

$$|\cos(t)| = \frac{\alpha_0(f_2)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f_2) \cos(kt) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos(2kt)$$

für alle $t \in (-\pi, \pi)$. Einsetzen von $t = 0$ und auflösen liefert den gesuchten Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(b) Nach Abschnitt 22.5 der Vorlesung lauten die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(t) = t^2$ gerade

$$\alpha_0(f) = \frac{2\pi^2}{3}, \qquad \alpha_k(f) = 4\frac{(-1)^k}{k^2}, \qquad \beta_k(f) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach der Parsevalschen Gleichung (vgl. Abschnitt 22.7) der Vorlesung in der reellen Version gilt

$$\frac{1}{\pi} \|f\|_2^2 = \frac{\alpha_0(f)^2}{2} + \sum_{k=1} \alpha_k(f)^2 + \beta_k(f)^2.$$

Einsetzen von $\|f\|_2^2 = \frac{2\pi^5}{5}$, sowie der obigen reellen Fourier-Koeffizienten liefert

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

wodurch sich durch Auflösen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ergibt.

Aufgabe 73:

(a) Nach Aufgabe 71 (a) gilt

$$|\sin(t)| = \frac{\alpha_0(f_1)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f_1) \cos(kt) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kt)$$

für alle $t \in (-\pi, \pi]$. Einsetzen von $t = 0$ und auflösen liefert den gesuchten Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Nach Abschnitt 22.5 der Vorlesung lauten die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion $g : (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, definiert durch $g(t) = |t|$ gerade

$$\alpha_0(g) = \pi, \qquad \alpha_k(g) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2m, \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k = 2m - 1 \end{cases}, \qquad \beta_k(g) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da g stetig bei 0 ist, und die linksseitige, sowie die rechtsseitige Ableitung von g bei 0 existieren, gilt nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung ($t = 0$)

$$0 = \frac{\alpha_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(g) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Folglich ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$