Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS 2014/15
05.03.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1:

(a) Für das charakteristische Polynom χ_A gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -4+\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)^2\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{1-ten Spalte}}}{=} (4-\lambda)^2(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2(1-\lambda).
\end{aligned}$$

Daher ist $\operatorname{spec}(A) = \{1, 4\}$. Die algebraischen Vielfachheiten sind $m_a(1) = 1$ und $m_a(4) = 2$.

(b) Für jedes $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ gilt $E_A(\lambda) = \operatorname{Kern}(A - \lambda I_3)$. Wir berechnen zunächst eine Basis von $E_A(\lambda)$ mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens und des (-1)-Ergänzungstricks. Anschließend werden diese mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren zu einer Orthonormalbasis von $E_A(\lambda)$ transformiert:

- $E_A(1)$:

$$\begin{aligned}
A - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \mid \cdot (-1) \\ \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad E_A(1) = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_1} \right\}$$

- $E_A(4)$:

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad E_A(4) = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_3} \right\}$$

Orthogonalisieren und Normieren liefert

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3' = \vec{v}_3 - \underbrace{(\vec{v}_3|\vec{w}_2)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{w}_3 = \frac{\vec{w}_3'}{\|\vec{w}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir setzen

$$S = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A = SDS^{-1}$ und $D'^2 = D$. Für $W := SD'S^{(-1)}$ folgt $W^2 = (SD'S^{(-1)})(SD'S^{(-1)}) = SD'^2S^{(-1)} = A$.

Da A symmetrisch ist und die Vektoren $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ orthogonalisiert wurden, ist S orthogonal. Also ist $S^{(-1)} = S^T$. Es folgt

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

(a) Es gilt

$$\partial S = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{1}{4} = 1 \right\} = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \right\}.$$

Wähle $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

als Parameterisierung von ∂S. Der Tangenteneinheitsvektor $\vec{T} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$ zeigt, von oben betrachtet, entgegen des Uhrzeigersinns. Da für die stetige Fortsetzung von $\vec{n}$ auf ∂S der

Vektor $\vec{n} \times \vec{T}$ stets ins Innere von S zeigt, ist γ positiv orientiert. Nach dem Stokes'schen Rotationssatz gilt

$$
\begin{aligned}
\int_S (\nabla \times f) \cdot \vec{n} \mathrm{d}\sigma &= \int_{\partial S} f(\vec{x}) \cdot \vec{T} \mathrm{d}s = \int_{\partial S} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\frac{3}{4}\cos^2(t)} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(t)} \mathrm{d}t}_{=:I_1} + \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t) \mathrm{d}t}_{=:I_2}.
\end{aligned}
$$

Ferner ist

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(t)} \mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(t)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(t)} \mathrm{d}t \\
&\underset{\mathrm{d}t = \mathrm{d}s}{\overset{t=s+2\pi}{=}} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(t)} \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(s+2\pi)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(s+2\pi)} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(t)} \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(s)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(s)} \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\frac{3}{4}\cos^2(t)} \mathrm{d}t \overset{\text{Symmetrie}}{=} 0,
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(t)}_{=u'(t)} \underbrace{\cos(t)}_{=v(t)} \mathrm{d}t = \underbrace{[\sin(t)\cos(t)]_{t=0}^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \mathrm{d}t \\
\Rightarrow I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t) \mathrm{d}t = \pi.
\end{aligned}
$$

Damit ist schließlich $\int_S (\nabla \times f) \cdot \vec{n} \mathrm{d}\sigma = \frac{3\pi}{4}$.

(b) (i) Für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times g_\alpha)(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 6xyz^2 - 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 - \alpha - 3y^2z^2 + 2 \\ \alpha^2 + 2yz^3 - 2 - \alpha - 2yz^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-\alpha \\ \alpha^2 - \alpha - 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \wedge \quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.
\end{aligned}
$$

(ii) Für jedes $\alpha \in M$ erfüllt g_α die Verträglichkeitsbedingung auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^3$. Damit ist g_α ein Potentialfeld und das Integral

$$\int_\gamma g_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

ist wegunabhängig (hängt nur von $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = (1,1,-1)^T$ ab). Wähle etwa $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1].$$

Dann ist $\tilde{\gamma}'(t) = (1,1,-1)^T$ für alle $t \in [0,1]$. Nach Obigem folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_{\tilde{\gamma}} g_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^1 t(\alpha - t^4) + t(\alpha^2 - 2t^4 - 2) - t(\alpha + 3t^4 - 2)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -6t^5 + \alpha^2 t \mathrm{d}t = \left[-t^6 + \frac{\alpha^2}{2}t^2\right]_{t=0}^1 = \frac{\alpha^2}{2} - 1 \overset{\alpha=2}{=} 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(a) (i) Klar: $f \in C^\infty$ und damit stetig und Q kompakt. Nach dem Satz über das Maximum nimmt f auf Q sein Maximum und Minimum an.

(ii) Hat f ein Extremum in Q bei $\vec{x_0}$, so gilt dort $(\nabla f)(\vec{x_0}) = \vec{0}$. Wir bestimmen zunächst solche kritischen Punkte. Es gilt

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ -2y + 2x \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow (x+y=0) \wedge (x-y=0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

für alle $(x,y) \in Q$. Also ist $\vec{x_0} = \vec{0}$ der einzige kritische Punkt von f in Q.

Für die Hesse-Matrix H_f von f gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit gilt für das charakteristische Polynom $\chi_{H_f(\vec{x_0})}$ von $H_f(\vec{x_0})$

$$\chi_{H_f(\vec{x_0})}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda) - 4 = \lambda^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Also ist $\operatorname{spec}(H_f(\vec{0})) = \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$ und $H_f(\vec{x_0})$ indefinit. Insbesondere hat f bei $\vec{x_0}$ kein Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

Damit müssen alle Extremstellen von f auf ∂Q liegen. Ist $\vec{x_1} = (1, y_1) \in \partial Q$ mit $y_1 \in I_1 = (-1,1)$ eine Extremstelle von f, so hat die Funktion $y \mapsto f(1,y)$ eine Extremstelle bei y_1. Da I_1 offen ist, muss dort $\frac{\partial f}{\partial y}(1, y_1) = 0$ gelten. Es gilt aber

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = 2(1-y) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \notin I_1.$$

Also kann es eine solche Extremstelle nicht geben. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(-1,y) &= -2(1+y) = 0 \Leftrightarrow y = -1, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) &= 2(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,-1) &= 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

müssen alle Extremstellen (x_1, y_1) von f in $\overline{Q}$ die Form $|x_1| = |y_1| = 1$ haben. Wegen

$$f(1,1) = 2 = f(-1,-1) \qquad \text{und} \qquad f(-1,1) = f(1,-1) = -2,$$

ist $m = f(-1,1) = -2$ und $M = f(1,1) = 2$, sowie $S_m = \{(-1,1),(1,-1)\}$ und $S_M = \{(-1,-1),(1,1)\}$.

(b) (i) Klar: $g \in C^1$. Ferner gilt

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x\cos(x)}{1+x^2} & -\frac{\log(1+x^2)\sin(y)}{2} \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Da für alle solche (x,y)

$$\begin{aligned} \det(g'(x,y)) &= \underbrace{e^x}_{>0}\left(\underbrace{\cos^2(x)\frac{x}{1+x^2}}_{\geq 0} + \underbrace{\sin^2(y)\frac{\log(1+x^2)}{2}}_{\geq 0}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2(x)\frac{x}{1+x^2} &= 0 \wedge \sin^2(x)\frac{\log(1+x^2)}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \cos(x) &= 0 \wedge \sin(x) = 0 \end{aligned}$$

gilt und sin und cos keine gemeinsamen Nullstellen haben, ist $g'(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ invertierbar. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ist g in der Tat lokal invertierbar.

Wegen

$$g(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\log(1+x^2)\cos(y+2\pi) \\ e^x\sin(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\log(1+x^2)\cos(y) \\ e^x\sin(y) \end{pmatrix} = g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, ist g nicht injektiv.

(ii) Es gilt

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x\cos(y)}{1+x^2} & -\frac{\sin(y)}{2}\log(1+x^2) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ist $g^{(-1)}$ differenzierbar mit

$$\left[g^{(-1)}\right]'(x,y) = \left[g'\left(g^{(-1)}(x,y)\right)\right]^{(-1)}$$

für alle $(x,y) \in U$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} g^{(-1)}(g(1,\pi)) &= \left[g'(g^{(-1)}(g(1,\pi)))\right]^{(-1)} = (g'(1,\pi))^{(-1)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1\cdot\cos(\pi)}{1+1^2} & -\frac{\sin(\pi)}{2}\log(1+1^2) \\ e^1\sin(\pi) & e^1\cos(\pi) \end{pmatrix}^{(-1)} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a) (i) Es gilt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus S).$$

Folglich hat f in $z_0 = -i$ und $z_1 = i$ jeweils einen Pol erster Ordnung. Für das Residuum von f bei z_1 gilt folglich

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1}(z - z_0)f(z) = \lim_{z \to i}\frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{1}{2ie}.$$

Der positiv orientierte, einfach geschlossener Weg γ umläuft die Polstelle z_1 genau ein Mal, z_0 wird nicht umlaufen. Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{\pi}{e}.$$

(ii) Für $z \in \mathrm{Bild}(\gamma_2)$ gilt

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\right| = \frac{e^{-\mathrm{Im}(z)}}{|z^2+1|} \overset{\mathrm{Im}(z)\geq 0}{\leq} \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{R^2-1}.$$

□

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\left[\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right]\right) \\
&\overset{\text{(a) (i)}}{=} \frac{\pi}{e} - \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \underbrace{L(\gamma_2)}_{=\pi R}\max_{z\in\mathrm{Bild}(\gamma_2)}|f(z)| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

ist der obere Limes Null und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}$.

(b) (i) Da g eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(g) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt ferner:

$$\begin{aligned}
\alpha_k(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\cos(\alpha t)}_{=u'(t)}\underbrace{\cos(kt)}_{=v(t)}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}\left[\sin(\alpha t)\cos(kt)\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{k}{\alpha}\int_0^\pi \underbrace{\sin(\alpha t)}_{=u'(t)}\underbrace{\sin(kt)}_{=v(t)}\mathrm{d}t\right) \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha\pi)(-1)^k - \frac{k}{\alpha^2}\left[\cos(\alpha t)\sin(kt)\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{k^2}{\alpha^2}\int_0^\pi\cos(\alpha t)\cos(kt)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2(-1)^k}{\pi\alpha}\sin(\alpha\pi) + \frac{1}{\pi}\frac{k^2}{\alpha^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)\cos(kt)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

„Phönix aus der Asche“ liefert

$$\alpha_k(g) = \frac{2(-1)^k}{\pi\alpha}\frac{1}{1-\frac{k^2}{\alpha^2}}\sin(\alpha\pi) = (-1)^k\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-k^2)}\sin(\alpha\pi)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\pi-} g(t) &= \cos(\alpha\pi) =: g(\pi)-, \\
\lim_{t\to-\pi+} g(t) &= \cos(-\alpha\pi) = \cos(\alpha\pi) =: g(-\pi)+, \\
\lim_{h\to 0+}\frac{g(-\pi+h)-g(-\pi)+}{h} &= \alpha\sin(\alpha\pi), \\
\lim_{h\to 0-}\frac{g(\pi+h)-g(\pi)-}{h} &= -\alpha\sin(\alpha\pi)
\end{aligned}$$

existieren. Nach dem Satz über die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihen konvergiert daher die Fourier-Reihe von g bei $t_0 = \pi$ gegen $\frac{(g(\pi)+)+(g(\pi)-)}{2}$. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha\pi) = \frac{(g(t_0)+) + (g(t_0)-)}{2} &= \frac{\alpha_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k(g) \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \beta_k(g) \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \right] \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} (-1)^k (-1)^k \right) \\
&= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Da $\sin(\alpha\pi) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$ gilt, darf man durch $\sin(\alpha\pi)$ dividieren und erhält die zu zeigende Identität.

$\square$