Def. \( P : \mathbb{W} \to \mathbb{W} \) linear mit \( P^2 = P \) heißt {\text{Projektion}}

Satz. \( P \) Projektion, \( Q := I - P \), \( M = \{ v \in \mathbb{W} : P v = v \} \)

(1) \( Q^2 = Q \)
(2) \( \text{Bild } P = M \)
(3) \( \text{Kern } P = \text{Bild } Q \)
(4) \( \mathbb{W} = \text{Bild } P \oplus \text{Kern } P \)

Satz. \( U_1, U_2 \text{ WR, } \mathbb{W} = U_1 \oplus U_2 \), also \( \omega = u_1 + u_2 \) ein-

denig mit \( \omega = e \), \( u_1, u_2 \in U_2 \)

\( \implies P \omega = u_1 \) ist Projektion von \( \mathbb{W} \) auf \( U_1 \) längs \( U_2 \)

Satz. \( \sum_{j=1}^n \langle b_n, \cdots, b_0 \rangle \) Orth von \( U \), \( P \omega = \sum_{j=1}^n \langle b_j, \omega \rangle b_j \)

\( \implies P \) Projektion von \( \mathbb{W} \) auf \( U \) längs \( U_2 \)

Zudem \( \| w - P w \| \leq \| w - u \| \) für jede \( w \) und alle \( u \in U \).

Satz. \( S = \{ u_1, u_2, \ldots \} \) abstr. unendliche Basis in \( \mathbb{W} \), \( S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \langle v_k, \omega \rangle v_k \)

(1) \( (\langle v_k, \omega \rangle) \) konv. \( L^2 \), \( \sum_{k=1}^n | \langle v_k, \omega \rangle |^2 \leq \| \omega \| L^2 \) (Bessel)

(2) \( \| \omega - S_n(\omega) \| \to 0 \) \( (n \to \infty) \) \( \iff \sum_{k=1}^n | \langle v_k, \omega \rangle |^2 = \| \omega \| L^2 \)

Def. \( S \) {\text{vollständig}} \( \iff \| \omega - S_n(\omega) \| \to 0 \) \( (n \to \infty) \) \( \forall \omega \in \mathbb{W} \)

Folgerung. \( S \) vollständig \( \iff \sum_{k=1}^n | \langle v_k, \omega \rangle |^2 = \| \omega \| L^2 \) \( \forall \omega \in \mathbb{W} \)

Def. \( f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \), \( \hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-iwx} \, dx \) \( (k \in \mathbb{Z}) \)

\( \text{Fourier-Koeffizient von } f \)

\( a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \) \( (k \neq 0) \)

\( b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \)

reelle Fourier-Approx. \( c_k(f) = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}, c_{-k} = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} \)

Satz. \( f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \) 2\( \pi \)-per., stetig auf \( \mathbb{R} \), also \( f \in \mathbb{L}^2 \)

\[ \sum_{w=-\infty}^{\infty} | \hat{f}(w) | ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) | ^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) | ^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) | ^2 \, dx \]

Satz : \( f \in \mathbb{C} \text{per} \left( [-\pi, \pi] \right) \)

(1) \( | \sum_{w \in \mathbb{Z}} \hat{f}(w) e^{iwx} | ^2 = f(x) \rightarrow f(x) \) stetig in \( x \)

(2) \( \| f - \sum_{w \in \mathbb{Z}} \hat{f}(w) e^{iwx} \| \xrightarrow{\text{w \to \infty}} 0 \).