Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie Wintersemester 2009/2010

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Institut für Analysis
Kaiserstr. 89, D – 76128 Karlsruhe, Germany
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst gewöhnliche Differentialgleichungen in expliziter Form

$$y' = f(x, y),$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^2$ in der Regel offen ist, und erinnern an die

Definition: Eine *Lösung* dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $\phi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$, wobei $\emptyset \neq \widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und für alle $x \in \widetilde{I}$ gilt

$$(x, \phi(x)) \in D \quad \text{und} \quad \phi'(x) = f(x, \phi(x)).$$

Da f stetig ist, ist ϕ in $\widetilde{I}$ sogar stetig differenzierbar.

Auch **Anfangswertprobleme** der Form

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

wobei f wie oben und $(x_0, y_0) \in D$ ist, haben wir schon kennengelernt. Eine Lösung $\phi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung ist ein *Lösung des Anfangswertproblems*, falls zusätzlich $\phi(x_0) = y_0$ gilt.

27 Elementare Methoden für Differentialgleichungen

27.1 Wiederholung: die lineare Differentialgleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

wobei $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ sind.

Erinnerung: Ist $A : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi$ für $x \in I$, so ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Gleichung $y' = a(x)y$ ist

$$y(x) = c e^{\int a(x)\, dx}, \quad x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
Eine *spezielle* Lösung der *inhomogenen* Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$ erhält man durch den Ansatz

$$y(x) = c(x) e^{\int a(x)\, dx} \quad \text{(Variation der Konstanten).}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Beispiel: $y' = \frac{y}{x} + x^2$, wobei $I = (0, \infty)$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $y(x) = cx$, $x \in I$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Durch Variation der Konstanten erhält man die spezielle Lösung $y(x) = x^3/2$, $x \in I$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = cx + \frac{1}{2}x^3, \quad x > 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

27.2 Bernoulli-Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0,$$

wobei $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetig sind und $\alpha \notin \{0, 1\}$ ist, heißt *Bernoullische Differentialgleichung.*

Die Bernoulli-Differentialgleichung lässt sich durch Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen:

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0$$

wird mittels $z := y^{1-\alpha}$ zu

$$z' + (1-\alpha)g(x)z + (1-\alpha)h(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung kann wie in 27.1 gelöst werden, und man erhält dann eine Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung durch $y(x) := z(x)^{1/(1-\alpha)}$.

Zu beachten: Für nicht-ganze $\alpha < 0$ ist y^α nur für positive y erklärt, in diesem Fall ist $D = I \times (0, \infty)$. Positiven Lösungen $y(x)$ entsprechen positive Lösungen $z(x)$. Eindeutigkeit der Lösungen (in $I \times (0, \infty)$) folgt aus 27.1.

Für nicht-ganze $\alpha > 0$ ist y^α für $y \geq 0$ erklärt, und durch $y(x) = 0$ ist eine Lösung gegeben. Laufen Lösungen $z(x)$ durch Null, so kann die Eindeutigkeit der Lösung in diesen Punkten verlorengehen.

Beispiele: 1) $y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^{-2/3} = 0$, wobei $I = (-1, \infty)$. Hier ist $\alpha = -\frac{2}{3}$, $g(x) = (1+x)^{-1}$ und $h(x) = 1 + x$. Die Substitution $z := y^{5/3}$ führt auf

$$z' + \frac{5}{3}\frac{z}{1+x} + \frac{5}{3}(1+x) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $z(x) = c(1+x)^{-5/3} - \frac{5}{11}(1+x)^2$. Für $z(x) > 0$ muss $c > 0$ sein. Für $c > 0$ sind Lösungen gegeben durch

$$y(x) = \left(c(1+x)^{-5/3} - \frac{5}{11}(1+x)^2\right)^{3/5}, \quad x \in (-1, (11c/5)^{3/11} - 1).$$

2) $y' = \sqrt{y}$: Hier ist $\alpha = \frac{1}{2}$, $g(x) = 0$ und $h(x) = -1$, und man kann die Differentialgleichung in $D = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ betrachten. Die Substitution $z := y^{1/2}$ führt auf

$$z' - \frac{1}{2} = 0$$

mit allgemeiner Lösung $z(x) = \frac{1}{2}x + c$. Diese ist ≥ 0 für $x \geq -2c$, also sind Lösungen gegeben durch

$$y(x) = (\frac{x}{2} + c)^2, \quad x \geq -2c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung mit Anfangswert $y(-2c) = 0$ aber auch durch $y(x) = 0$, $x \geq -2c$ gegeben. Außerdem beachte man, dass diese Lösungen links von $-2c$ nur durch 0 fortgesetzt werden können (wegen $y' \geq 0$, was aus der Differentialgleichung folgt).

Zu beachten für ganzzahlige α: Hier ist y^α für $y \neq 0$ ($\alpha < 0$) oder für alle $y \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) definiert. Es lässt sich auch ein Überblick über negative Lösungen y gewinnen, wenn man eine Vorzeichenbetrachtung durchführt ($\rightarrow$ Übungen).

27.3 Riccati-Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x), \tag{1}$$

wobei $g, h, k : I \to \mathbb{R}$ stetig sind, heißt *Ricatti-Differentialgleichung*. Für $k = 0$ auf I ist (1) eine Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = 2$ und man kann wie in 27.2 $z = y^{-1}$ substituieren.

Für $k \neq 0$ lassen sich Lösungen in der Regel nicht in geschlossener Form angeben. *Kennt* man jedoch bereits eine Lösung ϕ der Differentialgleichung, so lassen sich die übrigen wie folgt berechnen:

Setzt man $u = y - \phi$, so gilt

$$u' + g(x)u + h(x)(y^2 - \phi^2) = 0$$

und wegen $y^2 - \phi^2 = (y + \phi)(y - \phi) = (u + 2\phi)u$ weiter

$$u' + (g(x) + 2\phi(x)h(x))u + h(x)u^2 = 0. \tag{2}$$

Dies ist eine Bernoulli-Differentialgleichung, und die Substitution $z = u^{-1}$ (vgl. 27.2) führt auf die lineare Differentialgleichung

$$z' - (g(x) + 2\phi(x)h(x))z - h(x) = 0. \tag{3}$$

Die übrigen Lösungen der Ricatti-Differentialgleichung (1) erhält man also als

$$y(x) = \phi(x) + u(x) = \phi(x) + \frac{1}{z(x)},$$

wobei z die Lösungen von (3) durchläuft.

Beispiel: $y' + (2x-1)y - y^2 = 1 - x + x^2$. Hier ist $g(x) = 2x-1$, $h(x) = -1$ und $k(x) = 1 - x + x^2$. Eine spezielle Lösung ist $\phi(x) = x$, und (3) lautet hier

$$z' - \underbrace{(2x-1-2x)}_{=1} z + 1 = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist $z(x) = ce^{-x} - 1$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Die übrigen Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind also

$$y(x) = x + \frac{1}{ce^{-x} - 1},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ für $c \leq 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln c\}$ für $c > 0$.