womit klar ist, dass die in 29.3 angegebenen $\vec{\phi}_j$ Lösungen von (H) sind. Ende Woche 9

Beispiele: 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$: Es gilt $A^2 = -\omega^2 I$, also für $k \in \mathbb{N}$:

$$A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A, \qquad A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} I.$$

Somit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega t)^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega t)^{2k+1} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega t)^{2k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega t)^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Beachte $e^{0A} = I$ und

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \\ -\omega \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} = A\, e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Es gilt

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N.$$

Wegen $(\lambda I)N = N(\lambda I)$ ist also

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}.$$

Nun hat N^k für $k = 1, \ldots, n-1$ auf der k-ten Nebendiagonalen Einsen und sonst Nullen, und N^k ist die Nullmatrix für $k \geq n$. Somit ist

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ die folgende Blockmatrix-Struktur (Jordan-Normalform, siehe HM II, 16.9) hat

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_l \end{pmatrix},$$

wobei jedes J_j, $j = 1\ldots, l$, die Form wie in Beispiel 2) hat (mit λ_j statt λ und Dimension n_j statt n, wobei $n_1 + \ldots + n_l = n$). Man erhält dann

$$e^{tA} = Se^{\begin{pmatrix} tJ_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & tJ_l \end{pmatrix}} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{tJ_l} \end{pmatrix} S^{-1},$$

wobei die Matrizen $e^{tJ_j} \in \mathbb{C}^{n_j\times n_j}$ in Beispiel 2) berechnet wurden.
Man sieht hier deutlich, woher die polynomialen Anteile in den Fundamentalsystemen aus 29.3 kommen, nämlich von den Einsen auf der Nebendiagonalen in den Jordanblöcken J_j.

Variation der Konstanten: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t_0 \in I$, $\vec{b} : I \to \mathbb{C}^n$ stetig und $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$, so ist die eindeutige Lösung von

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I,$$

mit $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \quad t \in I.$$

Bemerkung: Wir betrachten diese Formel für $I = [0, \infty)$ und $t_0 = 0$. Dann ist der zweite Term die *Faltung* der matrixwertigen Funktion $t \mapsto e^{tA}$ mit der vektorwertigen Funktion $\vec{b}$. Nehmen wir weiter an, dass die Komponenten von $\vec{b}$ Laplace-transformierbar sind, so ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit genügend großem Realteil

$$\mathscr{L}\{\vec{y}(t)\}(s) = \mathscr{L}\{e^{tA}\}(s)\vec{y}_0 + \mathscr{L}\{e^{tA}\}(s)\mathscr{L}\{\vec{b}(t)\}(s)$$

und

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{e^{tA}\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{tA}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\sum_{k=0}^\infty \frac{t^kA^k}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\frac{t^k}{k!}\,dt}_{=s^{-(k+1)}}\, A^k \\ &= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{A}{s}\right)^k = \frac{1}{s}\left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1} = (sI - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Die matrixwertige Funktion $s \mapsto (sI - A)^{-1}$ heißt *Resolvente von* A, sie existiert für $s \in \mathbb{C} \setminus \{\text{Ewe von } A\}$ und ist *holomorph* ($\rightarrow$ HM II bzw. KAI) in dem Sinne, dass jeder Matrixeintrag eine holomorphe Funktion von s ist. Die obigen Rechnungen stimmen jedenfalls formal, können für $\operatorname{Re} s$ groß aber auch mathematisch exakt begründet werden. Für die Laplacetransformierte der Lösung erhalten wir so z.B.

$$\mathscr{L}\{\vec{y}(t)\}(s) = (sI - A)^{-1}\vec{y}_0 + (sI - A)^{-1}\mathscr{L}\{\vec{b}(t)\}(s),$$

was die Bedeutung der Resolvente bei der Lösung linearer Systeme unterstreicht.

Partielle Differentialgleichungen

Eine *partielle Differentialgleichung* ist eine Gleichung, welche Ableitungen einer gesuchten Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ enthält, wobei D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$ ist.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es bei partiellen Differentialgleichungen je nach Art der vorliegenden Gleichung viele verschiedene Theorien. Partielle Differentialgleichungen können nach verschiedenen Aspekten klassifiziert werden, zB nach der *Ordnung* der höchsten auftretenden Ableitung der gesuchten Funktion oder *algebraisch*:

Lineare Gleichungen enthalten die gesuchte Funktion u und ihre Ableitungen nur linear, *quasilineare* Gleichungen sind linear in den höchsten Ableitungen von u. Gleichungen, die nicht quasilinear sind heißen *voll nicht-linear*. Solche Gleichungen können durch Differenzieren in quasilineare Gleichungen überführt werden.

Das Gebiet ist riesig, und wir werden einige typische Vertreter kennenlernen.

Beispiele: 1) $\partial_t u + \partial_x u = 0$ ist von erster Ordnung und linear.

2) $\partial_t u + u\partial_x u = 0$ ist von erster Ordnung und quasilinear.

3) $u_{xx}u_{yy} - (u_x y)^2 = f$ ist von zweiter Ordnung und voll nicht-linear. Leitet man nach x ab, erhält man die Gleichung

$$u_{xxx}u_{yy} + u_{xx}u_{xyy} - 2u_{xy}u_{xxy} = f_x,$$

die von dritter Ordnung und quasilinear ist.

4) Die Gleichungen $\Delta u = 0$ (Laplacegleichung), $u_t = u_{xx}$ (Wärmeleitungsgleichung) und $u_{tt} = u_{xx}$ (Wellengleichung) sind von zweiter Ordnung und linear.

30 Transportgleichungen und Charakteristiken

30.1 Lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die Gleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = g(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

für eine Funktion $u = u(x,t)$, die wir mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

lösen wollen. Hierbei sind $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Eine *Lösung* soll eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sein, die (1) und (2) genügt. Man ersieht hieraus schon, dass $g \in C(\mathbb{R}^2)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ gelten muss.

Bemerkung: Die Abbildung $u \mapsto \partial_t u + a\partial_x u$, wobei hier Funktionen u abgebildet werden, ist linear. Deshalb erhält man die Lösung von (1), (2) durch Addition der Lösungen für die Fälle $g = 0$ und $f = 0$.

Die linke Seite von (1) ist in der (x,t)-Ebene die Richtungsableitung von u in Richtung $\binom{a}{1}$.

Fall $g = 0$: Dann bedeutet (1), dass u auf Geraden $\binom{x}{t} + r\binom{a}{1}$, $r \in \mathbb{R}$, konstant ist. Ist $\binom{x}{t}$ fixiert, so trifft diese Gerade die Achse $\mathbb{R} \times \{0\}$ im Punkt $\binom{x-at}{0}$ (setze $r = -t$). Aus (2) erhält man also

$$u(x,t) = f(x - at), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

dh der Anfangswert wird mit Geschwindigkeit a nach rechts transportiert. Für $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist dies tatsächlich die eindeutige Lösung von (1), (2) im Fall $g = 0$.

Fall $f = 0$: Dann bedeutet (1):

$$\frac{\partial u}{\partial(a,1)}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

und wir erhalten u durch Integration von g auf der Geraden $\binom{x}{t} + \mathbb{R}\binom{a}{1}$:

$$u(x,t) = u(x,t) - \underbrace{u(x-at,0)}_{=0} = \int_0^t (Du)\left(\begin{pmatrix} x-at \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} dr = \int_0^t g(x-(t-r)a, r)\, dr.$$

Beachte, dass $f = 0$ ist und dass wir Du für die Ableitung von u geschrieben haben. Ist g stetig partiell nach x differenzierbar, so ist hierdurch tatsächlich eine Lösung von (1) mit $u(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben (verwende 22.2 aus HM II). Ende Woche 10

Satz: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell nach x differenzierbar, so ist die eindeutige Lösung von (1), (2) gegeben durch

$$u(x,t) = f(x-at) + \int_0^t g(x - a(t-r), r)\, dr, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

30.2 Lineare Transportgleichung im $\mathbb{R}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u + \vec{a} \cdot \nabla u &=& g(\vec{x},t), \quad (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(\vec{x},0) &=& f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array} \tag{1}$$

lässt sich wie in 30.1 behandeln.

Satz: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nach jedem x_j, $j = 1, \ldots, n$, stetig partiell differenzierbar, so ist die eindeutige Lösung von (1) gegeben durch

$$u(\vec{x},t) = f(\vec{x} - t\vec{a}) + \int_0^t g(\vec{x} - (t-r)\vec{a}, r)\, dr, \quad (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{2}$$