Die linke Seite von (1) ist in der (x,t)-Ebene die Richtungsableitung von u in Richtung $\binom{a}{1}$.

Fall $g = 0$: Dann bedeutet (1), dass u auf Geraden $\binom{x}{t} + r\binom{a}{1}$, $r \in \mathbb{R}$, konstant ist. Ist $\binom{x}{t}$ fixiert, so trifft diese Gerade die Achse $\mathbb{R} \times \{0\}$ im Punkt $\binom{x-at}{0}$ (setze $r = -t$). Aus (2) erhält man also

$$u(x,t) = f(x-at), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

dh der Anfangswert wird mit Geschwindigkeit a nach rechts transportiert. Für $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist dies tatsächlich die eindeutige Lösung von (1), (2) im Fall $g = 0$.

Fall $f = 0$: Dann bedeutet (1):

$$\frac{\partial u}{\partial(a,1)}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

und wir erhalten u durch Integration von g auf der Geraden $\binom{x}{t} + \mathbb{R}\binom{a}{1}$:

$$u(x,t) = u(x,t) - \underbrace{u(x-at,0)}_{=0} = \int_0^t (Du)\left(\begin{pmatrix} x-at \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} dr = \int_0^t g(x-(t-r)a, r)\, dr.$$

Beachte, dass $f = 0$ ist und dass wir Du für die Ableitung von u geschrieben haben. Ist g stetig partiell nach x differenzierbar, so ist hierdurch tatsächlich eine Lösung von (1) mit $u(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben (verwende 22.2 aus HM II). Ende Woche 10

Satz: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell nach x differenzierbar, so ist die eindeutige Lösung von (1), (2) gegeben durch

$$u(x,t) = f(x-at) + \int_0^t g(x - a(t-r), r)\, dr, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

30.2 Lineare Transportgleichung im $\mathbb{R}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u + \vec{a} \cdot \nabla u &=& g(\vec{x}, t), \quad (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(\vec{x}, 0) &=& f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array} \tag{1}$$

lässt sich wie in 30.1 behandeln.

Satz: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nach jedem x_j, $j = 1, \dots, n$, stetig partiell differenzierbar, so ist die eindeutige Lösung von (1) gegeben durch

$$u(\vec{x}, t) = f(\vec{x} - t\vec{a}) + \int_0^t g(\vec{x} - (t-r)\vec{a}, r)\, dr, \quad (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

30.3 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung

Allgemeiner als in 30.1 und 30.2 betrachten wir quasilineare Gleichungen der Form

$$\vec{a}(\vec{x}, u) \cdot \nabla u = b(\vec{x}, u), \quad \vec{x} \in D, \tag{Q}$$

in $D \subset \mathbb{R}^n$, wobei $\vec{a} : D \times J \to \mathbb{R}^n$ und $b : D \times J \to \mathbb{R}$ gegeben sind und J ein reelles Intervall ist.

Nach den Erfahrungen in 30.1 betrachten wir eine gegebene Lösung $\vec{x} \mapsto u(\vec{x})$ auf Kurven $s \mapsto \vec{k}(s)$ in D und setzen $w(s) := u(\vec{k}(s))$ (s ist hier ein reeller Parameter aus einem Intervall I).

Ableiten von w ergibt nach der Kettenregel:

$$w'(s) = \nabla u(\vec{k}(s)) \cdot \vec{k}\,'(s) = \vec{k}\,'(s) \cdot \nabla u(\vec{k}(s)).$$

Andererseits ist

$$\vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \cdot \nabla u(\vec{k}(s)) = b(\vec{k}(s), w(s)).$$

Dies legt nahe, zur Lösung von (Q) das folgende *charakteristische System* zu betrachten

$$\begin{array}{rcl} \vec{k}\,'(s) & = & \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \\ w'(s) & = & b(\vec{k}(s), w(s)). \end{array} \tag{CS}$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ($n+1$ Gleichungen für die Funktion $\binom{\vec{k}}{w} : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$).

Definition: Lösungen $\binom{\vec{k}}{w}$ des charakteristischen Systems (CS) heißen *Charakteristiken* der Gleichung (Q), dabei heißt $\vec{k}$ *Grundcharakteristik*.

Bemerkung: Ist $\binom{\vec{k}}{w}$ eine Charakteristik, so ist die Grundcharakteristik $\vec{k}$ eine Kurve im Argumentraum $D \subset \mathbb{R}^n$ und w beschreibt (hoffentlich) den Wert einer Lösung auf dieser Kurve.

Hängt $\vec{a}(\vec{x}, u) = \vec{a}(\vec{x})$ nicht von u ab (man spricht dann von einer *semilinearen* Gleichung), so hängen die Grundcharakteristiken nicht von den Werten w ab, und man kann zunächst die erste Gleichung in (CS) und dann die zweite lösen. Gilt zusätzlich $b = 0$, so ist w konstant, was bedeutet, dass Lösungen von (Q) auf Grundcharakteristiken konstant sind.

Beispiel: Schreibt man in 30.1 (x_1, x_2) statt (x, t) und bringt die Gleichung 30.1 (1) mit $\vec{a}(\vec{x}, u) = \binom{a}{1}$ und $b(\vec{x}, u) = g(x_1, x_2)$ auf die Form (Q), so lautet das zugehörige charakteristische System

$$\begin{array}{rcl} k_1'(s) & = & a \\ k_2'(s) & = & 1 \\ w'(s) & = & g(k_1(s), k_2(s)). \end{array}$$

Grundcharakteristiken sind hier gegeben durch $\binom{k_1}{k_2}(s) = s\binom{a}{1} + \binom{c_1}{c_2}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Dies sind die Geraden aus 30.1. $w(s)$ erhält man dann wie in 30.1 durch Integration.

30.4 Anfangsbedingungen für quasilineare Gleichungen

Im Fall $n = 2$ wird man Anfangswerte für (Q) auf einer Kurve Γ in D vorgeben wollen. Man sieht schon im Beispiel in 30.3, dass Γ nicht eine der Grundcharakteristiken sein darf, da auf diesen die Werte der Lösung ja durch die zweite Gleichung in (CS) gegeben sind.

Im allgemeinen Fall gibt man eine genügend glatte Hyperfläche Γ in D vor und dort ebenfalls genügend glatte Anfangswerte $f(\vec{\xi})$, $\vec{\xi} \in \Gamma$. Dabei fordert man

(Γ, f) ist *nicht-charakteristisch*: in keinem $\vec{\xi} \in \Gamma$ ist $\vec{a}(\vec{\xi}, f(\vec{\xi}))$ tangential an Γ.

Diese Forderung gewährleistet, dass die Grundcharakteristiken Γ in einem Winkel $\neq 0$ schneiden. Sind dann noch $\vec{a}$ und b hinreichend glatt, kann man zeigen, dass (Q) lokal um Γ eindeutig lösbar ist.

Zweckmäßigerweise setzt man $s = 0$ auf Γ und löst (CS) mit dem Anfangswert

$$\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ f(\vec{\xi}) \end{pmatrix} \quad \text{für jedes } \vec{\xi} \in \Gamma.$$

Bezeichnet man die Lösung von (CS) mit $\binom{\vec{k}(s,\vec{\xi})}{w(s,\vec{\xi})}$, so erhält man die Lösung $u(\vec{x})$ von (Q) durch

$$u(\vec{x}) = w(s, \vec{\xi}), \quad \text{falls } \vec{x} = \vec{k}(s, \vec{\xi}).$$

Beispiel: $\partial_t u + x\partial_x u = 0$ mit $u(x, 0) = f(x)$ und $x \in \mathbb{R}$. Hier ist $\vec{a}(x, t, u) = \binom{x}{1}$. Zur Parametrisierung der x-Achse verwenden wir den reellen Parameter ξ, hier ist $\Gamma = \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Das charakteristische System und die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{array}{rclcrcl} k_1'(s) & = & k_1(s) & \qquad & k_1(0) & = & \xi \\ k_2'(s) & = & 1 & & k_2(0) & = & 0 \\ w'(s) & = & 0 & & w(0) & = & f(\xi). \end{array}$$

mit Lösung $\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \\ w(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ s \\ f(\xi) \end{pmatrix}$. Wir haben

$$\vec{k}(s, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \iff s = t,\ \xi = xe^{-t}.$$

Wenn f stetig differenzierbar ist, ist die eindeutige Lösung des Problems also gegeben durch

$$u(x, t) = f(e^{-t}x), \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

31 Die Potentialgleichung

Die Potentialgleichung oder auch *Poisson-Gleichung* ist die lineare Gleichung zweiter Ordnung

$$\Delta u = f$$

in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Im homogenen Fall $f = 0$ spricht man auch von der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0.$$

Bemerkung: Ein wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F}$ (dh $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$) ist (zumindest lokal) als Gradient eines Skalarfeldes V darstellbar $\vec{F} = \nabla V$. Ist das Vektorfeld zusätzlich quellenfrei (dh $\operatorname{div} \vec{F} = 0$), so genügt V der Laplace-Gleichung:

$$\Delta V = \operatorname{div}(\nabla V) = \operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

Beispiele sind in der Elektrostatik das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla V$, wobei typischerweise das Potential V an der Oberfläche eines Gebietes vorgegeben ist, oder in der Magnetostatik die magnetische Induktion $\vec{B} = -\nabla V$, wobei typischerweise $\frac{\partial V}{\partial \vec{N}} = 0$ am Rand eines Gebietes gilt (dh $\vec{B}$ ist am Rand tangential zur Oberfläche). Ende Woche 11

31.1 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch in* Ω, falls gilt

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Beispiele: 1) Für $n = 1$ und $I \subset \mathbb{R}$ Intervall sind die harmonischen Funktionen u in I alle von der Form $u(x) = ax + b$, $x \in I$.

2) Sei $n = 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, sowie $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine holomorphe Funktion ($\to$ Kap. 24 in HM II bzw. KAI). Dann sind u und v beliebig oft differenzierbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{in } \Omega.$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

dh Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.
Umgekehrt ist eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zumindest lokal Realteil einer holomorphen Funktion (der "passende" Imaginärteil v heißt *konjugiert harmonische Funktion von* u).

3) In Beispiel 21.10(5) haben wir gesehen, dass die duch $u(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$ definierte Funktion u in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ harmonisch ist.

31.2 Mittelwerteigenschaft

Ein stetiges $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn für jede Kugel

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\} \subset \Omega$$

gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|B(\vec{x}_0, r)|} \iiint_{B(\vec{x}_0,r)} u \, d\tau$$

bzw. genau dann, wenn für jede solche Kugel gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|\partial B(\vec{x}_0, r)|} \iint_{\partial B(\vec{x}_0,r)} u \, do.$$

31.3 Maximumsprinzip

Sei u harmonisch im Gebiet Ω. Gibt es ein $\vec{x}_0 \in \Omega$ mit

$$u(\vec{x}_0) \geq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega \quad \text{oder} \quad u(\vec{x}_0) \leq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega,$$

so ist u auf Ω konstant. Ist zusätzlich Ω beschränkt und u stetig auf $\overline{\Omega}$, so gilt für jedes $\vec{x} \in \Omega$:

$$\min_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}) \leq u(\vec{x}) \leq \max_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}),$$

dh harmonische Funktionen nehmen Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

31.4 Grundlösung der Laplace-Gleichung

Die für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definierte Funktion

$$\Gamma(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \|\vec{x}\| & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{4\pi} \|\vec{x}\|^{-1} & \text{für } n = 3 \end{cases}$$

heißt *Grundlösung der Laplacegleichung* oder auch *Fundamentallösung*. Häufig schreibt man dann

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \vec{x} \neq \vec{y}.$$

Bemerkung: Für allgemeines $n \geq 3$ lautet die Formel für die Grundlösung

$$\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \|\vec{x}\|^{2-n},$$

wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet (es ist $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$). Wir konzentrieren uns im folgenden auf den Fall $n = 3$.

Eigenschaften ($n = 3$): Für $j = 1, \ldots, 3$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} x_j \|\vec{x}\|^{-3},$$

also
$$\nabla\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{x}\|\vec{x}\|^{-3}$$
und
$$\nabla_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{x}-\vec{y})\|\vec{x}-\vec{y}\|^{-3}, \qquad \nabla_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{y}-\vec{x})\|\vec{x}-\vec{y}\|^{-3}.$$
Weiter ist
$$\Delta\Gamma(\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0}), \qquad \Delta_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x},\vec{y}) = 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{y}), \qquad \Delta_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x},\vec{y}) = 0 \quad (\vec{y} \neq \vec{x}),$$
dh Γ ist in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ harmonisch, $\vec{x} \mapsto \Gamma(\vec{x},\vec{y})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{y}\}$ und $\vec{y} \mapsto \Gamma(\vec{x},\vec{y})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x}\}$.

31.5 Greensche Darstellungsformel

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$ mit C^2-Rand, und sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset V$. Ist $u \in C^2(V)$, so gilt für jedes $\vec{x} \in \Omega$:
$$u(\vec{x}) = \iint_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) - \Gamma(\vec{x},\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial\vec{N}}(\vec{x}) \right) do(\vec{y}) + \iiint_{\Omega} \Gamma(\vec{x},\vec{y}) \Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}).$$

Beweisidee: Verwende die zweite Greensche Formel in 21.10(3) und die Rechnung von 21.10(6).

31.6 Greensche Funktion

Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $G(\vec{x},\vec{y})$, welche für $\vec{x},\vec{y} \in \overline{\Omega}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ definiert ist, heißt *Greensche Funktion von* Ω, falls G symmetrisch ist (dh $G(x,y) = G(y,x)$ gilt) und für jedes $y \in \Omega$ gilt:
$$G(x,y) = 0 \text{ für alle } x \in \partial\Omega \text{ und } x \mapsto h(x,y) := G(x,y) - \Gamma(x,y) \text{ ist harmonisch in } \Omega.$$

Bemerkung: Die zweite Bedingung bedeutet, dass G und Γ in $x = y$ "die gleiche" Singularität haben. Zusammen bedeuten die Bedingungen, dass $x \mapsto G(x,y)$ Lösung des Dirichlet-Problems
$$\Delta u = \delta_y, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$
ist.

Wendet man (bei genügend glattem Rand $\partial\Omega$) die zweite Greensche Formel an auf $v(\vec{y}) = h(\vec{x},\vec{y})$ und u und addiert das Ergebnis zu 31.5, so erhält man
$$u(\vec{x}) = \iint_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial G}{\partial\vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) \right) do(\vec{y}) + \iiint_{\Omega} G(\vec{x},\vec{y}) \Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}),$$
dh man kann mithilfe der Greenschen Funktion eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems
$$\Delta u = f, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

aus den Daten f und φ rekonstruieren.

Bemerkung: Ist Ω beschränkt mit C^2-Rand, so existiert eine Greensche Funktion für Ω.

Beispiel: Die Greensche Funktion für die Kugel $B(0,R)$ ist gegeben durch:

$$G(\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} \Gamma(\vec{x},\vec{y}) - \Gamma(\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}, \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}) & ,\vec{y} \neq \vec{0} \\ \Gamma(\vec{x}) - \Gamma(\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}) & ,\vec{y} = \vec{0} \end{cases}$$

31.7 Dirichletproblem auf der Kugel

Betrachte die Kugel $B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$. Sei $\varphi : \partial B(0,R) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $u : \overline{B(0,R)} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{4\pi R} \iint_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(\vec{y})}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}\, do(\vec{y}) & \text{für } \vec{x} \in B(0,R) \\ \varphi(\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in \partial B(0,R) \end{cases},$$

harmonisch in $B(0,R)$ und stetig in $\overline{B(0,R)}$. Dies ist die *Poissonsche Darstellungsformel* für die nach 31.3 eindeutige Lösung des Dirichletproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B(0,R), u|_{\partial B(0,R)} = \varphi.$$