31 Die Potentialgleichung

Die Potentialgleichung oder auch *Poisson-Gleichung* ist die lineare Gleichung zweiter Ordnung

$$\Delta u = f$$

in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Im homogenen Fall $f = 0$ spricht man auch von der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0.$$

Bemerkung: Ein wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F}$ (dh rot $\vec{F} = 0$) ist (zumindest lokal) als Gradient eines Skalarfeldes V darstellbar $\vec{F} = \nabla V$. Ist das Vektorfeld zusätzlich quellenfrei (dh div $\vec{F} = 0$), so genügt V der Laplace-Gleichung:

$$\Delta V = \operatorname{div}(\nabla V) = \operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

Beispiele sind in der Elektrostatik das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla V$, wobei typischerweise das Potential V an der Oberfläche eines Gebietes vorgegeben ist, oder in der Magnetostatik die magnetische Induktion $\vec{B} = -\nabla V$, wobei typischerweise $\frac{\partial V}{\partial \vec{N}} = 0$ am Rand eines Gebietes gilt (dh $\vec{B}$ ist am Rand tangential zur Oberfläche). Ende Woche 11

31.1 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch in* Ω, falls gilt

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Beispiele: 1) Für $n = 1$ und $I \subset \mathbb{R}$ Intervall sind die in I harmonischen Funktionen u alle von der Form $u(x) = ax + b$, $x \in I$.

2) Sei $n = 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, sowie $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine holomorphe Funktion ($\to$ Kap. 24 in HM II bzw. KAI). Dann sind u und v beliebig oft differenzierbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{in } \Omega.$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

dh Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.
Umgekehrt ist eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zumindest lokal Realteil einer holomorphen Funktion (der "passende" Imaginärteil v heißt *konjugiert harmonische Funktion von* u).
Insbesondere ist für $n = 2$ eine harmonische Funktion immer beliebig oft differenzierbar. Dies gilt auch für $n > 2$.

3) In Beispiel 21.10(5) haben wir gesehen, dass die durch $u(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$ definierte Funktion u in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ harmonisch ist.

31.2 Mittelwerteigenschaft

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ein stetiges $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn für jede Kugel

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\} \subset \Omega$$

gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|B(\vec{x}_0, r)|} \iiint_{B(\vec{x}_0,r)} u \, d\tau \qquad \text{(Kugelmittel)}$$

bzw. genau dann, wenn für jede solche Kugel gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|\partial B(\vec{x}_0, r)|} \iint_{\partial B(\vec{x}_0,r)} u \, do \qquad \text{sphärisches Mittel).}$$

Hierbei bezeichnet $|B(\vec{x}_0, r)| = \frac{4\pi}{3} r^3$ das Volumen von $B(\vec{x}_0, r)$ und $|\partial B(\vec{x}_0, r)| = 4\pi r^2$ die Oberfläche der Kugel.

Die entsprechenden Aussagen gelten aber für jedes $n \geq 2$.

31.3 Maximumsprinzip

Sei u harmonisch im Gebiet Ω. Gibt es ein $\vec{x}_0 \in \Omega$ mit

$$\begin{array}{rll} & u(\vec{x}_0) \geq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega & (u \text{ hat lokales Maximum in } \vec{x}_0) \\ \text{oder} & u(\vec{x}_0) \leq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega & (u \text{ hat lokales Minimum in } \vec{x}_0), \end{array}$$

so ist u auf Ω konstant. Ist zusätzlich Ω beschränkt und u stetig auf $\overline{\Omega}$, so gilt für jedes $\vec{x} \in \Omega$:

$$\min_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}) \leq u(\vec{x}) \leq \max_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}),$$

dh harmonische Funktionen nehmen Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

31.4 Grundlösung der Laplace-Gleichung

Die für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definierte Funktion

$$\Gamma(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \|\vec{x}\| & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{4\pi} \|\vec{x}\|^{-1} & \text{für } n = 3 \end{cases}$$

heißt *Grundlösung der Laplacegleichung* oder auch *Fundamentallösung*. Häufig schreibt man dann

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \vec{x} \neq \vec{y}.$$

Bemerkung: Für allgemeines $n \geq 3$ lautet die Formel für die Grundlösung

$$\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \|\vec{x}\|^{2-n},$$

wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet (es ist also $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$).

Man erhält $\Gamma(\vec{x})$, wenn man eine Lösung u der Laplacegleichung der Form $u(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$ sucht, wobei $g = g(r)$ eine C^2-Funktion auf $(0, \infty)$ ist. Das führt auf die Gleichung

$$g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r) = 0, \quad r > 0$$

mit Lösung $g'(r) = cr^{1-n}$. Dies bestimmt g bis auf eine additive Konstante, c wird so gewählt, dass die Formel in 31.5 unten gilt.

Wir konzentrieren uns im folgenden auf den Fall $n = 3$.

Eigenschaften ($n = 3$): Für $j = 1, \ldots, 3$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} x_j \|\vec{x}\|^{-3},$$

also

$$\nabla\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{x} \|\vec{x}\|^{-3}$$

und

$$\nabla_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{x} - \vec{y})\|\vec{x} - \vec{y}\|^{-3}, \qquad \nabla_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{y} - \vec{x})\|\vec{x} - \vec{y}\|^{-3}.$$

Weiter ist

$$\Delta\Gamma(\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0}), \qquad \Delta_{\vec{x}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{y}), \qquad \Delta_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad (\vec{y} \neq \vec{x}),$$

dh Γ ist in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ harmonisch, $\vec{x} \mapsto \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{y}\}$ und $\vec{y} \mapsto \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x}\}$.

31.5 Greensche Darstellungsformel

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$ mit C^2-Rand, und sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset V$. Ist $u \in C^2(V)$, so gilt für jedes $\vec{x} \in \Omega$:

$$u(\vec{x}) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial\vec{N}}(\vec{y}) \right) do(\vec{y}) + \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{y}) \, d\tau(\vec{y}).$$

Beachte hierbei $\frac{\partial u}{\partial\vec{N}}(\vec{y}) = \nabla u(\vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y})$ und

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{y}}\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y} - \vec{x}}{4\pi\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \cdot \vec{N}(\vec{y}).$$

Beweisidee: Verwende für festes $\vec{x} \in \Omega$ die zweite Greensche Formel in 21.10(3), dh Ende Woche 12

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \Big(g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \Big)\, do = \iiint\limits_{\Omega} \Big(g\Delta f - f \Delta g \Big)\, d\tau$$

für $g(\vec{y}) = u(\vec{y})$ und $f(\vec{y}) = \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$, sowie die Rechnung von 21.10(6), dh

$$\iiint\limits_{G} \frac{1}{\|\vec{y}\|} \Delta\varphi(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) = -4\pi\varphi(\vec{0}) \quad \text{für } 0 \in G,$$

woraus folgt:

$$\iiint\limits_{\Omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) = u(\vec{x}).$$

31.6 Greensche Funktion

Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $G(\vec{x}, \vec{y})$, welche für $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{\Omega}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ definiert ist, heißt *Greensche Funktion von* Ω, falls G symmetrisch ist (dh $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ gilt) und für jedes $\vec{y} \in \Omega$ gilt:

$G(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \partial\Omega$ und $\vec{x} \mapsto h(\vec{x}, \vec{y}) := G(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ ist harmonisch in Ω.

Bemerkung: Die zweite Bedingung bedeutet, dass G und Γ in $\vec{x} = \vec{y}$ "die gleiche" Singularität haben. Zusammen bedeuten die Bedingungen, dass für festes $\vec{y} \in \Omega$ die Funktion $\vec{x} \mapsto G(\vec{x}, \vec{y})$ Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = \delta_{\vec{y}}, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

ist.

Wendet man (bei genügend glattem Rand $\partial\Omega$) die zweite Greensche Formel an auf $f(\vec{y}) = h(\vec{x}, \vec{y})$ und $g = u$ und addiert das Ergebnis zu 31.5, so erhält man

$$u(\vec{x}) = \iint_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) \right) do(\vec{y}) + \iiint_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}),$$

dh man kann mithilfe der Greenschen Funktion (wenn sie existiert!) eine Lösung $u \in C^2(V)$ des Dirichletproblems

$$\Delta u = f, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

im Inneren von Ω aus den Daten f und φ rekonstruieren.

Bemerkung: Ist Ω beschränkt mit C^2-Rand, so existiert eine Greensche Funktion für Ω.

Beispiel: Die Greensche Funktion für die Kugel $B(0, R)$ ist gegeben durch:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}, \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}) & , \vec{y} \neq \vec{0} \\ \Gamma(\vec{x}) - \Gamma(\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}) & , \vec{y} = \vec{0} \end{cases} .$$

Beachte dazu, dass für $\vec{y} \neq 0$ gilt

$$\left\| \frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x} - \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y} \right\|^2 = \frac{\|\vec{y}\|^2\|\vec{x}\|^2}{R^2} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + R^2$$

und dass der rechte Ausdruck symmetrisch in $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist. Außerdem ist $G(\vec{x},\vec{y}) = 0$ für $\|\vec{y}\| = R$. Für festes $\vec{y} \in B(0,R)$ ist die Singularität von $G(\vec{x},\vec{y}) - \Gamma(\vec{x},\vec{y})$ in $\vec{x} = \frac{R^2}{\|\vec{y}\|^2}\vec{y}$ und liegt außerhalb von $B(0,R)$.

31.7 Dirichletproblem auf der Kugel

Betrachte die Kugel $B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$. Sei $\varphi : \partial B(0,R) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $u : \overline{B(0,R)} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{R^2-\|\vec{x}\|^2}{4\pi R} \iint_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(\vec{y})}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3}\, do(\vec{y}) & \text{für } \vec{x} \in B(0,R) \\ \varphi(\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in \partial B(0,R) \end{cases}, \tag{PF}$$

harmonisch in $B(0,R)$ und stetig in $\overline{B(0,R)}$. Dies ist die *Poissonsche Darstellungsformel* für die nach 31.3 eindeutige Lösung des Dirichletproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B(0,R), \quad u|_{\partial B(0,R)} = \varphi.$$

Beachte, dass man die Formel (PF) aus 31.6 erhält, wenn man für die Greensche Funktion der Kugel $B(0,R)$ den Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{y}} G(\vec{x},\vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y}), \quad \vec{y} \in \partial B(0,R),$$

unter Berücksichtigung von $\vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}}{R}$ berechnet.