Beweisidee: Verwende für festes $\vec{x} \in \Omega$ die zweite Greensche Formel in 21.10(3), dh Ende Woche 12

$$\iint\limits_{\partial G} \Big(g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \Big)\, do = \iiint\limits_{G} \Big(g\Delta f - f \Delta g \Big)\, d\tau$$

für $G = \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\vec{x}, \varepsilon)$, $g(\vec{y}) = u(\vec{y})$ und $f(\vec{y}) = \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$. Hierbei sei ε so klein, dass $\overline{B(\vec{x}, \varepsilon)} \subset \Omega$ gilt. Dann ist

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) + \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y}) \right) do(\vec{y})$$

$$= \iint\limits_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y}) \right) do(\vec{y}).$$

Beachte hier, dass für $\vec{y} \in \partial B(\vec{x}, \varepsilon)$ gilt: $\vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}-\vec{x}}{\varepsilon}$. Mit der Formel für $\nabla_{\vec{y}} \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ aus 31.4 erhalten wir

$$= \iint\limits_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} u(\vec{y}) \underbrace{\frac{\|\vec{y}-\vec{x}\|^2}{4\pi\varepsilon \|\vec{y}-\vec{x}\|^3}}_{=1/(4\pi\varepsilon^2)}\, do(\vec{y}) + \iint\limits_{\partial B(\vec{x},\varepsilon)} \underbrace{\frac{1}{4\pi \|\vec{y}-\vec{x}\|}}_{=1/(4\pi\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y})\, do(\vec{y}).$$

Da u in $\vec{x}$ stetig ist und $4\pi\varepsilon^2$ gerade die Oberfläche von $B(\vec{x}, \varepsilon)$, konvergiert das erste Integral für $\varepsilon \to 0$ gegen $u(\vec{x})$. Da ∇u in der Nähe von $\vec{x}$ beschränkt ist, konvergiert das zweite Integral für $\varepsilon \to 0$ gegen Null. Wir haben ähnlich auch schon in 21.10(6) in HM II argumentiert.

31.6 Greensche Funktion

Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $G(\vec{x}, \vec{y})$, welche für $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{\Omega}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ definiert ist, heißt *Greensche Funktion von* Ω, falls G symmetrisch ist (dh $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ gilt) und für jedes $\vec{y} \in \Omega$ gilt:

$G(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \partial\Omega$ und $\vec{x} \mapsto h(\vec{x}, \vec{y}) := G(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ ist harmonisch in Ω.

Bemerkung: Die zweite Bedingung bedeutet, dass G und Γ in $\vec{x} = \vec{y}$ "die gleiche" Singularität haben. Zusammen bedeuten die Bedingungen, dass für festes $\vec{y} \in \Omega$ die Funktion $\vec{x} \mapsto G(\vec{x}, \vec{y})$ Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = \delta_{\vec{y}}, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

ist.

Erläuterung: Setze $u(\vec{x}) := G(\vec{x}, \vec{y})$, wobei $\vec{y} \in \Omega$ fest ist. Dann ist $u(\vec{x}) = 0$ für $\vec{x} \in \partial\Omega$ klar. Die Gleichung $\Delta u = \delta_{\vec{y}}$ ist *distributionell* zu verstehen, dh man multipliziert mit C^2-Funktionen $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die es eine Menge $B \subset \Omega$ mit $\overline{B} \subset \Omega$ so gibt, dass

$\psi = 0$ außerhalb von B gibt, und integriert über Ω. Solche Funktionen ψ und alle ihre Ableitungen verschwinden also am Rand von Ω.

Dabei ist $\delta_{\vec{y}}$ die Dirac"funktion" in $\vec{y}$, erklärt durch

$$\delta_{\vec{y}}(\psi) = \psi(\vec{y}).$$

Man schreibt formal mitunter statt $\delta_{\vec{y}}(\psi)$ auch

$$\iiint\limits_{\Omega} \psi(\vec{x})\delta_{\vec{y}}(\vec{x})\,d\tau(\vec{x}) \quad \text{oder} \quad \iiint\limits_{\Omega} \psi(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{y})\,d\tau(\vec{x}).$$

Auch Δu ist hier distributionell zu verstehen. Für eine Distribution T ist dabei (vgl. HMII bzw. KAI für den Fall $n = 1$):

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}T\Big)(\psi) := T\Big(-\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big), \quad j = 1, \ldots, n,$$

und also

$$(\Delta T)(\psi) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}T\Big)(\psi) = \sum_{j=1}^{n} T\Big((-1)^2\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big) = T(\Delta\psi).$$

Somit erhalten wir

$$(\Delta u)(\psi) = u(\Delta\psi) = \iiint\limits_{\Omega} G(\vec{x},\vec{y})(\Delta\psi)(\vec{x})\,d\tau(\vec{x})$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(\vec{x},\vec{y})(\Delta\psi)(\vec{x})\,d\tau(\vec{x}) + \iiint\limits_{\Omega} h(\vec{x},\vec{y})(\Delta\psi)(\vec{x})\,d\tau(\vec{x}).$$

Nach 31.5 ist dabei das erste Integral $= \psi(\vec{y})$, da die Randterme für ψ verschwinden. Das zweite Integral verschwindet wegen der zweiten Greenschen Formel, da $h(\cdot,\vec{y})$ in Ω harmonisch ist.

Beobachtung: Wendet man (bei genügend glattem Rand $\partial\Omega$) die zweite Greensche Formel an auf $f(\vec{y}) = h(\vec{x},\vec{y})$ und $g = u$ und addiert das Ergebnis zur Greenschen Darstellungsformel 31.5, so erhält man

$$u(\vec{x}) = \iint_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y})\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y})\right) do(\vec{y}) + \iiint_{\Omega} G(\vec{x},\vec{y})\Delta u(\vec{y})\,d\tau(\vec{y}),$$

dh man kann mithilfe der Greenschen Funktion (wenn sie existiert!) eine Lösung $u \in C^2(V)$ des Dirichletproblems

$$\Delta u = f, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

im Inneren von Ω aus den Daten f und φ rekonstruieren.

Bemerkung: Ist Ω beschränkt mit C^2-Rand, so existiert eine Greensche Funktion für Ω.

Beispiel: Die Greensche Funktion für die Kugel $B(\vec{0}, R)$ ist gegeben durch:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x}, \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y}) & , \vec{y} \neq \vec{0} \\ \Gamma(\vec{x}) - \Gamma(\frac{R}{\|\vec{x}\|}\vec{x}) & , \vec{y} = \vec{0} \end{cases} .$$

Beachte dazu, dass für $\vec{y} \neq \vec{0}$ gilt

$$\left\| \frac{\|\vec{y}\|}{R}\vec{x} - \frac{R}{\|\vec{y}\|}\vec{y} \right\|^2 = \frac{\|\vec{y}\|^2 \|\vec{x}\|^2}{R^2} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + R^2$$

und dass der rechte Ausdruck symmetrisch in $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist. Außerdem ist $G(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für $\|\vec{y}\| = R$. Für festes $\vec{y} \in B(\vec{0}, R) \setminus \{\vec{0}\}$ ist die Singularität von $G(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in $\vec{x} = \frac{R^2}{\|\vec{y}\|^2}\vec{y}$ und liegt außerhalb von $B(\vec{0}, R)$.

31.7 Dirichletproblem auf der Kugel

Betrachte die Kugel $B(\vec{0}, R) \subset \mathbb{R}^3$. Sei $\varphi : \partial B(\vec{0}, R) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $u : \overline{B(\vec{0}, R)} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{R^2 - \|\vec{x}\|^2}{4\pi R} \iint_{\partial B(\vec{0},R)} \frac{\varphi(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \, do(\vec{y}) & \text{für } \vec{x} \in B(\vec{0}, R) \\ \varphi(\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in \partial B(\vec{0}, R) \end{cases} , \tag{PF}$$

harmonisch in $B(\vec{0}, R)$ und stetig in $\overline{B(\vec{0}, R)}$. Dies ist die *Poissonsche Darstellungsformel* für die nach 31.3 eindeutige Lösung des *Dirichletproblems*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B(\vec{0}, R), \quad u|_{\partial B(\vec{0},R)} = \varphi.$$

Beachte, dass man die Formel (PF) aus 31.6 erhält, wenn man für die Greensche Funktion der Kugel $B(\vec{0}, R)$ den Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{y}} G(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y}), \quad \vec{y} \in \partial B(\vec{0}, R),$$

unter Berücksichtigung von $\vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}}{R}$ berechnet (Übung!).

31.8 Die Poissongleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C(\overline{\Omega})$. Eine Lösung der Poissongleichung

$$(\Delta u)(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \tag{P}$$

ist gegeben durch das *Newton-Potential von f*, dh durch

$$w(\vec{x}) := \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(\vec{x},\vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega}.$$

Warnung: Es gilt $w \in C^1(\Omega)$. Im allgemeinen ist jedoch w **keine** C^2-Funktion in Ω. Gilt zusätzlich

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \le C\|\vec{x} - \vec{y}\|^\alpha, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Omega,$$

wobei $C > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ Konstanten sind, so ist $w \in C^2(\Omega)$ und eine solche Abschätzung (mit demselben α aber anderen Konstanten C) gilt für alle zweiten Ableitungen von w.

Bemerkung: Will man die Poissongleichung mit Randwerten lösen, also etwa

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{P$_D$}$$

wobei $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig ist, so erhält man die Lösung als $u = w + z$, wobei w das Newton-Potential von f ist und $z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\Delta z = 0 \text{ in } \Omega, \qquad z|_{\partial\Omega} = \varphi - (w|_{\partial\Omega}).$$

Bemerkung: Ist $G(\vec{x},\vec{y})$ eine Greensche Funktion für Ω, so ist auch durch

$$v(\vec{x}) = \iiint\limits_{\Omega} G(\vec{x},\vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega},$$

eine Lösung von (P) gegeben und zwar diejenige, die außerdem $v|_{\partial\Omega} = 0$ genügt. Eine Lösung von (P$_D$) erhält man dann durch

$$u(\vec{x}) = \iiint\limits_{\Omega} G(\vec{x},\vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) + \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) \varphi(\vec{y})\, do(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega},$$

vergleiche Bemerkung in 31.6.

32 Die Diffusionsgleichung

32.1 Motivation (Wärmeleitungsgleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Wir betrachten Wärmeleitung in Ω und eine Funktion $u = u(t, \vec{x})$, wobei $t \in [0, T]$ und $\vec{x} \in \Omega$, die die Temperaturverteilung beschreibt. Wir setzen voraus, dass das Medium in Ω homogen ist. Für jedes Gebiet $G \subset \Omega$ ist dann

$$\iiint\limits_G u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x})$$

proportional zur in Wärmeenergie in G. Energieerhaltung bedeutet also für ein glattes Gebiet G:

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_G u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = \underbrace{-\iint\limits_{\partial G} \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \vec{N}(\vec{x})\, do(\vec{x})}_{\text{Wärmetransport durch } \partial G} + \underbrace{\iiint\limits_G f(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x})}_{\text{Wärmequellen in } G},$$

wobei $\vec{j}(t, \vec{x})$ der Vektor des Wärmeflusses sei. Wenn u glatt genug ist, kann man links Integral und $\frac{d}{dt}$ vertauschen ($\rightarrow$ Kap.22 in HMII) und erhält mit dem Divergenzsatz:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = -\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) + \iiint\limits_G f(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}).$$

Da $G \subset \Omega$ sonst beliebig ist, geht dies nur, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = -\operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x}) + f(t, \vec{x}) \quad \text{für alle } (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega.$$

Fouriers Gesetz besagt nun

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = -c \nabla u(t, \vec{x}) \quad \text{für ein } c > 0$$

dh dass sich die Wärme in Richtung des größten Temperaturgefälles ausbreitet und betragsmäßig proportional zur Länge des Gradienten $\nabla u(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} (t, \vec{x})$ ist. Zusammen ergibt sich die Wärmeleitungsgeichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = c \Delta u(t, \vec{x}) + f(t, \vec{x}) \quad \text{für alle } (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega,$$

wobei sich $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nur auf die räumlichen Variablen bezieht.

Bemerkung: Genauso lässt sich argumentieren, wenn $u(t, \vec{x})$ die Dichte eines Gases beschreibt, dass in Ω der Diffusion unterliegt, oder wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \neq 3$.

32.2 Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten

$$\partial_t u(t, \vec{x}) = (\Delta u)(t, \vec{x}), \quad t > 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{W}$$

Die für $t > 0$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definierte Funktion

$$G(t, \vec{x}) := (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4t}}$$

heißt *Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung* oder *Wärmeleitungskern auf dem* $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\partial_t G(t, \vec{x}) = \Delta G(t, \vec{x}) \quad \text{für alle } t > 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dh G von (W). Häufig schreibt man auch

$$G(t, \vec{x}, \vec{y}) := G(t, \vec{x} - \vec{y}) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4t}} \quad \text{für } t > 0,\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = 1$$

für alle $t > 0$ und

$$G(t, \vec{x}) \longrightarrow 0 \quad (t \to 0+) \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{0},$$

sowie

$$G(t, \cdot) \longrightarrow \delta_{\vec{0}} \quad (t \to 0+)$$

im Sinne von

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, \vec{x})\varphi(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) \longrightarrow \varphi(\vec{0}) \quad (t \to 0+)$$

für alle stetigen Funktionen mit beschränktem Träger.

33.3 Anfangswerte für $t = 0$

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so gibt es genau ein beschränkte Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, \vec{x}) &= (\Delta u)(t, \vec{x}), \quad t > 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, \vec{x}) &= f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Diese ist gegeben durch

$$u(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad t > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und

$$u(t, \vec{x}) \longrightarrow f(\vec{x}) \quad (t \to 0+) \quad \text{für jedes } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$