32 Die Diffusionsgleichung

32.1 Motivation (Wärmeleitungsgleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Wir betrachten Wärmeleitung in Ω und eine Funktion $u = u(t, \vec{x})$, wobei $t \in [0, T]$ und $\vec{x} \in \Omega$, die die Temperaturverteilung beschreibt. Wir setzen voraus, dass das Medium in Ω homogen ist. Für jedes Gebiet $G \subset \Omega$ ist dann

$$\iiint\limits_G u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x})$$

proportional zur in Wärmeenergie in G. Energieerhaltung bedeutet also für ein glattes Gebiet G:

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_G u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = \underbrace{-\iint\limits_{\partial G} \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \vec{N}(\vec{x})\, do(\vec{x})}_{\text{Wärmetransport durch } \partial G} + \underbrace{\iiint\limits_G f(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x})}_{\text{Wärmequellen in } G},$$

wobei $\vec{j}(t, \vec{x})$ der Vektor des Wärmeflusses sei. Wenn u glatt genug ist, kann man links Integral und $\frac{d}{dt}$ vertauschen ($\to$ Kap.22 in HMII) und erhält mit dem Divergenzsatz:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = -\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}) + \iiint\limits_G f(t, \vec{x})\, d\tau(\vec{x}).$$

Da $G \subset \Omega$ sonst beliebig ist, geht dies nur, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = -\operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x}) + f(t, \vec{x}) \quad \text{für alle } (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega.$$

Fouriers Gesetz besagt nun

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = -c \nabla u(t, \vec{x}) \quad \text{für ein } c > 0$$

dh dass sich die Wärme in Richtung des größten Temperaturgefälles ausbreitet und betragsmäßig proportional zur Länge des Gradienten $\nabla u(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} (t, \vec{x})$ ist. Zusammen ergibt sich die Wärmeleitungsgeichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = c \Delta u(t, \vec{x}) + f(t, \vec{x}) \quad \text{für alle } (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega,$$

wobei sich $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nur auf die räumlichen Variablen bezieht.

Bemerkung: Genauso lässt sich argumentieren, wenn $u(t, \vec{x})$ die Dichte eines Gases beschreibt, dass in Ω der Diffusion unterliegt, oder wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \neq 3$.

32.2 Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten

$$\partial_t u(t,\vec{x}) = (\Delta u)(t,\vec{x}), \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{W}$$

Die für $t>0$ und $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ definierte Funktion

$$G(t,\vec{x}) := (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4t}}$$

heißt *Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung* oder *Wärmeleitungskern auf dem* $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\partial_t G(t,\vec{x}) = \Delta G(t,\vec{x}) \quad \text{für alle } t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n,$$

dh G ist Lösung von (W). Häufig schreibt man auch

$$G(t,\vec{x},\vec{y}) := G(t,\vec{x}-\vec{y}) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4t}} \quad \text{für } t>0,\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n.$$

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = 1 \tag{I}$$

für alle $t>0$ und

$$G(t,\vec{x}) \longrightarrow 0 \quad (t\to 0+) \quad \text{für } \vec{x}\neq\vec{0},$$

sowie

$$G(t,\cdot) \longrightarrow \delta_{\vec{0}} \quad (t\to 0+)$$

im Sinne von

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\varphi(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) \longrightarrow \varphi(\vec{0}) \quad (t\to 0+) \tag{K}$$

für alle stetigen Funktionen $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $\varphi=0$ außerhalb einer Kugel $B(\vec{0},R)$. Die Konvergenzaussage gilt dabei für viel mehr Funktionen, vgl. 32.3 unten.

Beweis für (I)**:** Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x})$ ist gleich

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\Big((4\pi t)^{-1/2}e^{-\frac{x_j^2}{4t}}\Big)\, dx_n\cdots dx_2\, dx_1 = \prod_{j=1}^{n}\Big((4\pi t)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_j^2}{4t}}\, dx_j\Big).$$

Für ein einzelnes Integral führt die Substitution $\xi = 2\eta\sqrt{t}$, $d\xi = 2\sqrt{t}\, d\eta$, auf

$$(4\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta = 1,$$

vergleiche Beispiel (3) in 21.4 (HMII).

Beweisskizze für (K)**:** Zunächst ist φ beschränkt, und es gibt $K > 0$ mit $\|\varphi(\vec{x})\| \leq K$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $\|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{0})\| < \varepsilon/2$ für $\|\vec{x}\| \leq \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big| \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\vec{x})\varphi(\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) - \varphi(\vec{0}) \Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{G(t,\vec{x})}_{>0} |\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{0})|\, d\tau(\vec{x}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\|\vec{x}\|\leq\delta} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) + 2K \int\limits_{\|\vec{x}\|\geq\delta} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}).\end{aligned}$$

Das erste Integral rechts ist ≤ 1 wegen (I). Im zweiten Integral substituiert man $\vec{x} = \vec{y}\sqrt{t}$ und erhält

$$\int\limits_{\|\vec{x}\|\geq\delta} G(t,\vec{x})\, d\tau(\vec{x}) = \int\limits_{\|\vec{y}\|\geq\delta/\sqrt{t}} G(1,\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) \longrightarrow 0 \quad (t \to 0+).$$

Insbesondere findet man $t_0 > 0$ so, dass für $t \in (0, t_0)$ das zweite Integral $\leq \frac{\varepsilon}{4K}$ ist.

32.3 Anfangswerte für $t = 0$

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so gibt es genau eine beschränkte Lösung des Problems

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,\vec{x}) &= (\Delta u)(t,\vec{x}), \quad t > 0,\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,\vec{x}) &= f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Diese ist gegeben durch

$$u(t,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad t > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und

$$u(t,\vec{x}) \longrightarrow f(\vec{x}) \quad (t \to 0+) \quad \text{für jedes } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Ist $g : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, so ist eine Lösung von

$$\partial_t u(t,\vec{x}) - \Delta u(t,\vec{x}) = g(t,\vec{x}),\ t > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u(0,\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

gegeben durch

$$u(t,\vec{x}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(t-s, \vec{x} - \vec{y}) g(s,\vec{y})\, d\tau(\vec{y}), \quad t > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist (formal!) die “Variation-der-Konstanten-Formel”.

32.4 Maximumsprinzip

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $T \in (0,\infty)$ und $\Omega_T := (0,T) \times \Omega$. Dann gilt

$$\partial\Omega_T = (\{0,T\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0,T] \times \partial\Omega).$$

Wir definieren den *parabolischen Rand*

$$\partial^*\Omega_T := (\{0\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0,T] \times \partial\Omega),$$

bei dem der "Deckel" des Zylinders fehlt.

Wir setzen voraus

$$u : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ ist stetig und in } \Omega_T \text{ zweimal stetig partiell differenzierbar nach } x_1,\dots,x_n, \text{ sowie stetig partiell nach } t \text{ differenzierbar.} \tag{RV}$$

Satz: Es gelte (RV) und $\partial_t u - \Delta u = 0$ in Ω_T. Dann nimmt u Maximum und Minimum auf dem parabolischen Rand $\partial^*\Omega_T$ an, dh es gilt

$$\begin{aligned}
\max\{u(t,\vec{x}) : t \in [0,T], \vec{x} \in \overline{\Omega}\} &= \max\{u(t,\vec{x}) : (t,\vec{x}) \in \partial^*\Omega_T\} \\
\min\{u(t,\vec{x}) : t \in [0,T], \vec{x} \in \overline{\Omega}\} &= \min\{u(t,\vec{x}) : (t,\vec{x}) \in \partial^*\Omega_T\}.
\end{aligned}$$

Allgemeiner gilt die Aussage über das Minimum, wenn $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ in Ω_T, und die Aussage über das Maximum gilt, wenn $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ in Ω_T.

Folgerung: Das Anfangs-Randwertproblem

$$\partial_t u - \Delta u = g \text{ in } \Omega_T, \qquad u(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x}),\ (t,\vec{x}) \in \partial^*\Omega_T,$$

hat höchstens eine Lösung $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (RV).

Beweis: Sind u_1 und u_2 Lösungen, so ist $v := u_1 - u_2$ Lösung von

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega_T, \qquad u|_{\partial^*\Omega_T} = 0.$$

Aus dem Maximumsprinzip folgt dann $u = 0$ in Ω_T.

32.5 Separation der Variablen

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ mit homogenen Dirichletrandbedingungen:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, x \in (0,1), \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad u(0,x) = f(x), \tag{1}$$

wobei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Zur Lösung machen wir den *Separationsansatz*

$$u(t,x) = v(t)w(x), \qquad t > 0, x \in [0,1].$$

Dann ist $u_t = v'(t)w(x)$ und $u_{xx} = v(t)w''(x)$, und Einsetzen in die Gleichung führt (für $v \neq 0$, $w \neq 0$) auf

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}, \qquad t > 0, x \in [0,1].$$

Da die linke Seite nicht von x und die rechte Seite nicht von t abhängt, geht dies nur, wenn es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}, \qquad t > 0, x \in [0,1].$$

Dies führt auf $v(t) = e^{\lambda t} v(0)$, $t > 0$, und auf

$$w''(x) - \lambda w(x) = 0, \qquad w(0) = w(1) = 0,$$

wobei wir auch die Randbedingungen des ursprünglichen Problems berücksichtigt haben. Wir suchen nun λ, für die es Lösungen $w \neq 0$ dieses Randwertproblems gibt.

Für $\lambda = 0$ ist jede Lösung von $w'' = 0$ ein Gerade. Aus den Randbedingungen folgt dann $w = 0$.

Für $\lambda \neq 0$ ist jede Lösung von $w'' - \lambda w = 0$ dabei eine Linearkombination

$$w(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x},$$

wobei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\mu^2 = \lambda$. Die Randbedingungen implizieren nun

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{und} \quad c_1 e^{\mu} + c_2 e^{-\mu} = 0.$$

Dieses lineares Gleichungssystem hat genau dann eine nichttriviale Lösung $\binom{c_1}{c_2} \neq \binom{0}{0}$, wenn $e^{-\mu} - e^{\mu} = 0$ ist. Dies ist äquivalent zu $e^{2\mu} = 1$, dh zu $\mu = k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($k = 0$ ist wegen $\mu \neq 0$ ausgeschlossen). Wir erhalten also $\lambda_k = -k^2\pi^2$ und als zugehörige reelle Lösung (bis auf eine multiplikatve Konstante)

$$w_k(x) = \sin(k\pi x) = \frac{1}{2i}\,(e^{k\pi i x} - e^{-k\pi i x}), \qquad x \in [0,1].$$

Zusammen haben wir also Lösungen

$$u_k(t,x) = e^{-k^2\pi^2 t} w_k(x) = e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x), \quad t \geq 0, x \in [0,1],$$

erhalten mit Anfangswerten $u_k(0,x) = w_k(x) = \sin(k\pi x)$, $x \in [0,1]$.

Gilt nun $f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sin(k\pi x)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und gewisse $a_k \in \mathbb{R}$, so ist die Lösung von (1) gegeben durch

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{m} a_k u_k(t,x) = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x), \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,1].$$

Entsprechendes gilt für $m = \infty$, wenn man die Koeffizienten (a_k) so sind, dass man den Reihen einen Sinn geben kann. Dies ist z.B. für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ der Fall. Die Reihe für f konvergiert dann absolut und gleichmäßig auf $[0,1]$ und u ist stetig auf $[0,\infty) \times [0,1]$. Gliedweises Ableiten der Reihe für u ist in $(0,\infty) \times [0,1]$ möglich nach Sätzen aus HM I.

Bemerkung: Ein analoges Vorgehen ist möglich bei Gleichungen

$$\partial_t u - \Delta u = 0,\ t > 0, \vec{x} \in \Omega, \qquad u(t,\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega, \qquad u(0,\vec{x}) = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \tag{2}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist. Auch hier muss man λ (die *Eigenwerte*) und Funktionen $w : \Omega \to \mathbb{R}$ (die *Eigenfunktionen*) suchen mit

$$\Delta w = \lambda w \text{ in } \Omega, \qquad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Man braucht etwas mehr mathematische Theorie um zu zeigen, dass dies hier immer auf eine Folge (λ_k) von Eigenwerten führt mit $\lambda_k \to -\infty$ (ohne weitere Voraussetzungen an Ω).

Fordert man statt der homogenen Dirichletbedingung $u(t,\vec{x}) = 0$, $\vec{x} \in \partial\Omega$, homogene Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \vec{N}} u(t,\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega,$$

so braucht man für eine entsprechende Aussage Regularitätsvoraussetzungen an den Rand $\partial\Omega$.

Ende Woche 14