33 Die Wellengleichung

33.1 Die eindimensionale Wellengleichung

Wir betrachten

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= f(x), \\ u_t(0,x) &= g(x), \end{aligned} \tag{W1}$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sind. Eine Lösung ist eine C^2-Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die (W1) genügt. Somit muss $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ gelten.

Wir setzen also $f \in C^2(R)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ voraus. Zur Lösung von (W1) faktorisieren wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)$$

und setzen $v := u_t + u_x$. Zu lösen ist also zunächst

$$v_t - v_x = 0, \qquad v(0,x) = u_t(0,x) + u_x(0,x) = g(x) + f'(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Die eindeutige Lösung ist nach 30.1 gegeben durch

$$v(t,x) = g(x+t) + f'(x+t), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Wir lösen nun

$$u_t + u_x = v(t,x) = g(x+t) + f'(x+t), \qquad u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Nach 30.1 ist die eindeutige Lösung hiervon gegeben durch

$$u(t,x) = f(x-t) + \int_0^t g(x-t+2r) + f'(x-t+2r)\,dr.$$

Wir substituieren $x - t + 2r = y$, also $dr = \frac{1}{2}\,dy$, und erhalten

$$u(t,x) = f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f'(y)\,dy}_{=f(x+t)-f(x-t)},$$

also

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy \tag{D1}$$

als Darstellung für die eindeutige Lösung von (W1) auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (beachte dabei die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an f und g).

Bemerkung: Man erhält die Lösungsformel auch aus der Beobachtung, dass für C^2-Funktionen φ und ψ durch

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

eine Lösung von $u_{tt} - u_{xx} = 0$ gegeben ist. Dann sucht man φ und ψ so, dass u Lösung von (W1) wird.

33.2 Diskussion

An der Formel (D1) kann man wesentliche Unterschiede zu Lösungen der Wärmeleitungsgleichung erkennen:

- Man kann die Wellengleichung für $t \in \mathbb{R}$ lösen, die Wärmeleitungsgleichung hingegen nur für $t > 0$.
- Für $t > 0$ ist der Wert $u(t, x)$ einer Lösung der Wellengleichung schon bestimmt durch die Werte von f und g im Intervall $[x - t, x + t]$. Umgekehrt beeinflussen die Anfangswerte im Punkt $(0, y)$ die Werte der Lösung nur in dem Kegel $|x - y| \leq t$, dh Störungen haben eine *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* (hier 1). Hingegen haben Störungen im Anfangswert für die Wärmeleitungsgleichung eine *unendliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit: ist der Anfangswert etwa > 0 nur auf einem kleinen Intervall und $= 0$ außerhalb, so ist $u(t, x) > 0$ für alle $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$.
- Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind C^∞ in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, selbst wenn der Anfangswert nur (beschränkt) und stetig ist. Hier müssen wir hingegen $f \in C^2$, $g \in C^1$ voraussetzen, um $u \in C^2$ zu erhalten. Für mehr Regularität von u muss man mehr Regularität von den Anfangswerten fordern.

33.3 Die dreidimensionale Wellengleichung

Satz: Die eindeutige Lösung für das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, \vec{x}) - \Delta u(t, \vec{x}) &= 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(0, \vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ u_t(0, \vec{x}) &= g(\vec{x}), \end{aligned} \tag{W3}$$

mit gegebenen $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ lässt ich darstellen als

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x}, t)} \Big(t g(\vec{y}) + f(\vec{y}) + \nabla f(\vec{y}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) \Big)\, do(\vec{y}). \tag{D3}$$

Beweisskizze (Methode der sphärischen Mittel): Sei $u(\vec{x}, t)$ eine Lösung von (W3). Wir definieren für $r > 0$:

$$M(t, \vec{x}, r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x}, r)} u(t, \vec{y})\, do(\vec{y})$$

und

$$F(\vec{x}, r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x}, r)} f(\vec{y})\, do(\vec{y}), \qquad G(\vec{x}, r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x}, r)} g(\vec{y})\, do(\vec{y})$$

und setzen diese Funktionen gerade auf $r \in \mathbb{R}$ fort. Dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t,x,r) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big) M(t,x,r). \tag{*}$$

Zum Beweis von (*) setzen wir für $v \in C^2(\mathbb{R}^3)$:

$$S(v,r) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(\vec{x},r)} v(\vec{y})\, do(\vec{y}).$$

Dann ist mithilfe der Substitution $\vec{y} = \vec{x} + r\vec{\eta}$, $do(\vec{y}) = r^2\, do(\vec{\eta})$:

$$\begin{aligned}
\partial_r S(v,r) &= \partial_r \Big[\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial B(\vec{0},1)} v(\vec{x}+r\vec{\eta})\, do(\vec{\eta})\Big] \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial B(\vec{0},1)} (\nabla v)(\vec{x}+r\vec{\eta}) \cdot \vec{\eta}\, do(\vec{\eta}) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},r)} \frac{\partial v}{\partial \vec{N}}(\vec{y})\, do(\vec{y}) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint\limits_{B(\vec{x},r)} (\Delta v)(\vec{y})\, do(\vec{y}),
\end{aligned}$$

wobei wir beim dritten Gleichheitszeichen zurücksubstituieren und $\vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}-\vec{x}}{r} = \vec{\eta}$ für $\vec{y} \in \partial B(\vec{x},r)$ beachten und beim letzten Gleichheitszeichen den Divergenzsatz verwenden. Daraus folgt

$$\partial_r^2 S(v,r) = \frac{-2}{4\pi r^3} \iiint\limits_{B(\vec{x},r)} (\Delta v)(\vec{y})\, do(\vec{y}) + \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},r)} (\Delta v)(\vec{y})\, do(\vec{y}) = -\frac{2}{r}\partial_r S(v,r) + S(\Delta v, r).$$

Wir wenden diese Formel für festes t auf $v(\vec{y}) = u(t,\vec{y})$ an. Da u Lösung von (W3) ist, gilt

$$u_{tt}(t,\vec{y}) = \Delta u(t,\vec{y}) = \Delta v(\vec{y}),$$

und nach Kap. 22 ist

$$\partial_t^2 M(t,\vec{x},r) = S(u_{tt}(t,\vec{y}), r).$$

Damit ist (*) gezeigt.

Nach (*) ist für festes $\vec{x}$ also $w(r,t) := M(t,\vec{x},r)$ Lösung von

$$w_{tt} = w_{rr} + \frac{2}{r} w_r, \qquad w(r,0) = F(\vec{x},r),\ w_t(r,0) = G(\vec{x},r).$$

Damit ist aber $v := rw$ Lösung von

$$v_{tt} = v_{rr}, \qquad v(r,0) = rF(\vec{x},r),\ v_t(r,0) = rG(\vec{x},r).$$

Nach 33.1 haben wir also

$$\begin{aligned} rM(t,\vec{x},r) &= \frac{1}{2}\Big[(r+t)F(\vec{x},r+t)+(r-t)G(\vec{x},r-t)\Big]+\frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t}\rho G(\vec{x},\rho)\,d\rho, \\ M(t,\vec{x},r) &= \frac{1}{2r}\Big[(t+r)F(\vec{x},t+r)-(t-r)G(\vec{x},t-r)\Big]+\frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\rho G(\vec{x},\rho)\,d\rho. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichung wird verwendet, dass $r \to G(\vec{x},r)$ eine gerade Funktion ist und $\rho \to \rho G(\vec{x},\rho)$ eine ungerade Funktion ist.

Für $r \to 0$ erhalten wir

$$u(t,\vec{x}) = tG(\vec{x},t)+\frac{\partial}{\partial t}(tF(\vec{x},t)), \tag{D3'}$$

woraus (D3) folgt. Umgekehrt definiert (D3) tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung (man muss dazu wie beim Beweis von (*) substituieren).

Bemerkung: Der Wert von u im Punkt $(t,\vec{x})$ hängt hier nur von den Anfangsdaten auf der Sphäre $\partial B(\vec{x},t)$ ab, aber nicht von Werten im Inneren der Kugel $B(\vec{x},t)$ (*Huygenssches Prinzip*, "there's music in $\mathbb{R}^3$").

Hier braucht man sogar $f \in C^3$, $g \in C^2$, damit $u \in C^2$ ist, dh die Anfangsdaten müssen *regulärer* sein, als es die Lösung ist.

33.4 Die zweidimensionale Wellengleichung

Man erhält die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung, indem man $x_3 = 0$ in (D3') setzt. Die dreidimensionale Sphäre

$$\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 : (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+y_3^2=t^2\}$$

wird (mit $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{y}=(y_1,y_2)$) über die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B(\vec{x},t)}$ parametrisiert, dh durch

$$y_3 = \pm\sqrt{t^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}.$$

Dies führt auf

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B(\vec{x},t)}\frac{g(\vec{y})}{\sqrt{t^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}}\,d\tau(\vec{y})+\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B(\vec{x},t)}\frac{f(\vec{y})}{\sqrt{t^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}}\,d\tau(\vec{y})\Big). \tag{D2}$$

Hier hängt der Wert von u im Punkt $(t,\vec{x})$ von den Anfangsdaten in der *ganzen* Kreisscheibe $B(\vec{x},t)$ ab.

Ende Woche 15