wobei z die Lösungen von (3) durchläuft.

Beispiel: $y' + (2x-1)y - y^2 = 1 - x + x^2$. Hier ist $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = -1$ und $k(x) = 1 - x + x^2$. Eine spezielle Lösung ist $\phi(x) = x$, und (3) lautet hier

$$z' - \underbrace{(2x - 1 - 2x)}_{=1} z + 1 = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist $z(x) = ce^{-x} - 1$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Die übrigen Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind also

$$y(x) = x + \frac{1}{ce^{-x} - 1},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ für $c \leq 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln c\}$ für $c > 0$.

27.4 Exakte Differentialgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und seien $P, Q : G \to \mathbb{R}$ stetig.

Definition: Die Differentialgleichung

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

heißt *exakt in* G, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\partial_x F = P \quad \text{und} \quad \partial_y F = Q \quad \text{in } G,$$

dh wenn das Vektorfeld $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ auf G ein Potential (eine *Stammfunktion*) besitzt.

Bemerkung: Die Schreibweise bei (1) deutet an, dass man sich noch nicht entschieden hat, ob die Lösung die Gestalt $y(x)$ oder $x(y)$ oder $(x(t), y(t))$ (Parameterdarstellung) haben soll, dh ob man

$$\begin{aligned} P(x,y) + Q(x,y)y' &= 0 \quad \text{oder} \\ P(x,y)\frac{dx}{dy} + Q(x,y) &= 0 \quad \text{oder} \\ P(x,y)\dot{x} + Q(x,y)\dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet.

Satz 1: Ist die Differentialgleichung (1) in G exakt und ist $F : G \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so sind alle Lösungen von (1) implizit gegeben durch

$$F(x,y) = \text{const}, \tag{2}$$

dh durch die *Höhenlinien* von F.

Beweis: Integriere die Differentialgleichung in Parameterform nach t und beachte $\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \partial_x F\dot{x} + \partial_y F\dot{y}$ (Kettenregel aus HM II, vgl. 19.13).

Mit dem Satz 2 aus 20.4 (HM II) erhalten wir

Satz 2: Ist G *einfach zusammenhängend*, sind P, Q stetig differenzierbar auf G und gilt $\partial_y P = \partial_x Q$ in G, so sind alle Lösungen von (1) implizit durch (2) gegeben, wobei $F : G \to \mathbb{R}$ ein Potential (eine Stammfunktion) zum Vektorfeld $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ auf G ist. Insbesondere ist für $(x_0, y_0) \in G$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad y(x_0) = y_0$$

implizit gegeben durch

$$F(x,y) = F(x_0, y_0). \tag{3}$$

Erinnerung: Ist G *konvex*, so ist G einfach zusammenhängend. Insbesondere sind Rechtecke $G = I \times J$ einfach zusammenhängend.

Beispiele: (1) **Trennung der Variablen** (Wiederholung): $y' = f(x)g(y)$, wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar seien. Ist $g(y) \neq 0$ auf J, so führt Division durch y auf

$$\frac{y'}{g(y)} - f(x) = 0.$$

Hier ist $P(x,y) = -f(x)$ und $Q(x,y) = \frac{1}{g(y)}$, sowie $\partial_y P = 0 = \partial_x Q$ auf $G := I \times J$. Somit ist die Differentialgleichung in G exakt. Ist A eine Stammfunktion von f und B eine Stammfunktion von $1/g$, so sind die Lösungen implizit gegeben durch

$$B(y) - A(x) = \text{const.}$$

(2) $(1 + 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$. Hier ist $P(x,y) = 1 + 2xy$, $Q(x,y) = x^2$ und $P_y = 2x = Q_x$. Also ist die Differentialgleichung in $G = \mathbb{R}^2$ exakt. Eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x,y) = x + x^2 y$, also sind alle Lösungen implizit gegeben durch

$$x + x^2 y = c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Außer den Lösungen $y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ ist auch $x(y) = 0$ eine Lösung.

(3) $\frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $P_y = Q_x$. Die Differentialgleichung ist also z.B. in $G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ exakt. Bestimmung eines Potentials:

$$\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{y}\int \frac{dx}{(x/y)^2 + 1} = \arctan(\frac{x}{y}) + \varphi(y)$$

und
$$Q = \partial_y(\arctan(x/y) + \varphi(y)) = \frac{1}{(x/y)^2+1} \cdot \frac{-x}{y^2} + \varphi'(y)$$
führt auf $\varphi'(y) = 0$, also $\varphi(y) = 0$. Ein Potential in G ist gegeben durch $F(x,y) = \arctan(x/y)$.

Auch in $\widetilde{G} := \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ ist die Differentialgleichung exakt und $F(x,y) = \arctan(x/y)$ ein Potential.

Definiert man
$$\widetilde{F}(x,y) = \begin{cases} \arctan(x/y) & , y > 0 \\ \pi/2 & , y = 0, x > 0 \\ \arctan(x/y) + \pi & , y < 0 \end{cases} ,$$
so ist $\widetilde{F}$ ein Potential auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$, also ist die Differentialgleichung in D exakt. Hingegen hat $\widetilde{F}$ keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und die Differentialgleichung ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht exakt.

Bemerkung zur Auflösung von (3)**:** Ist $\partial_y F(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \neq 0$, so lässt sich (3) lokal nach y auflösen. Ist $\partial_x F(x_0, y_0) = P(x_0, y_0) \neq 0$, so lässt sich (3) lokal nach x auflösen (siehe Satz über implizit definierte Funktionen, 19.15 in HM II).

27.5 Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)

Wir betrachten
$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{1}$$
wobei $P, Q : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind und G **einfach zusammenhängend** ist.

Ist (1) nicht exakt, so kann man versuchen, (1) mit $\mu(x,y)$ (wobei $\mu \neq 0$ auf G) so zu multiplizieren, dass
$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0 \tag{2}$$
exakt ist. Ein solches $\mu \in C^1(G)$ heißt *integrierender Faktor* oder *Eulerscher Multiplikator*.

Beispiel: $p(x)q(y)\,dx + dy = 0$ ist i.a. nicht exakt, aber durch Multiplikation mit $\mu(x,y) = 1/q(y)$ erhält man die exakte Differentialgleichung $p(x)\,dx + (q(y))^{-1}\,dy = 0$.

Bemerkung: Die Differentialgleichung (2) ist exakt genau dann, wenn gilt
$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \quad \text{in } G. \tag{3}$$
In Spezialfällen lässt sich (3) lösen.

Beispiele: (a) $\mu = \mu(x)$ hängt nur von x ab. Dann wird (3) zu
$$\mu P_y = \mu' Q + \mu Q_x, \quad \text{dh zu} \quad \mu' = \frac{P_y - Q_x}{Q}\,\mu. \tag{4}$$
Dies kann man lösen, falls $\frac{P_y - Q_x}{Q} = a(x)$ nur von x abhängt.

So ist etwa

$$y\,dx + 2x\,dy = 0$$

wegen $P_y = 1 \neq 2 = Q_x$ nicht exakt, aber $\frac{P_y - Q_x}{Q} = -1/(2x)$ hängt nur von x ab. Lösung von (4) ist hier $\mu(x) = 1/\sqrt{x}$. Die Differentialgleichung

$$\frac{y}{\sqrt{x}}\,dx + 2\sqrt{x}\,dy = 0$$

ist in $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ exakt, eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x, y) = 2y\sqrt{x}$. Ende Woche 2

(b) $\mu = \mu(y)$ hängt nur von y ab. Dann wird (3) zu

$$\mu' P + \mu P_y = \mu Q_x, \quad \text{dh zu} \quad \mu' = \frac{Q_x - P_y}{P}\,\mu. \tag{5}$$

Dies kann man lösen, falls $\frac{Q_x - P_y}{P} = b(y)$ nur von y abhängt.

Im Beispiel in (a) ist $\frac{Q_x - P_y}{P} = 1/y$ und Lösung von (5) ist dann $\mu(y) = y$. Die Differentialgleichung

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$$

ist in $G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ exakt, eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x, y) = xy^2$.

Allgemeiner: $\mu = \rho(\varphi(x, y))$. Dann ist

$$\mu_x = (\rho' \circ \varphi)\varphi_x \quad \text{und} \quad \mu_y = (\rho' \circ \varphi)\varphi_y$$

und (3) wird zu

$$\rho' \circ \varphi = \left(\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q} \right) \rho \circ \varphi.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich lösen, falls $\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q} = h(\varphi(x, y))$ gilt.

Beispiel: (c) $\varphi(x, y) = x + y$ und $\frac{Q_x - P_y}{P - Q} = h(x + y)$ hängt nur von $x + y$ ab. Dann löst man

$$\rho'(t) = h(t)\rho(t)$$

und setzt $\mu(x, y) := \rho(x + y)$. Dies ist ein integrierender Faktor.