So ist etwa

$$y\,dx + 2x\,dy = 0$$

wegen $P_y = 1 \neq 2 = Q_x$ nicht exakt, aber $\frac{P_y - Q_x}{Q} = -1/(2x)$ hängt nur von x ab. Lösung von (4) ist hier $\mu(x) = 1/\sqrt{x}$. Die Differentialgleichung

$$\frac{y}{\sqrt{x}}\,dx + 2\sqrt{x}\,dy = 0$$

ist in $G = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ exakt, eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x,y) = 2y\sqrt{x}$. Ende Woche 2

(b) $\mu = \mu(y)$ hängt nur von y ab. Dann wird (3) zu

$$\mu' P + \mu P_y = \mu Q_x, \quad \text{dh zu} \quad \mu' = \frac{Q_x - P_y}{P}\,\mu. \tag{5}$$

Dies kann man lösen, falls $\frac{Q_x - P_y}{P} = b(y)$ nur von y abhängt.

Im Beispiel in (a) ist $\frac{Q_x - P_y}{P} = 1/y$ und Lösung von (5) ist dann $\mu(y) = y$. Die Differentialgleichung

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$$

ist in $G = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ exakt, eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x,y) = xy^2$.

Allgemeiner: $\mu = \rho(\varphi(x,y))$. Dann ist

$$\mu_x = (\rho' \circ \varphi)\varphi_x \quad \text{und} \quad \mu_y = (\rho' \circ \varphi)\varphi_y$$

und (3) wird zu

$$\rho' \circ \varphi = \left(\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q}\right) \rho \circ \varphi. \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich lösen, falls $\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q} = h(\varphi(x,y))$ gilt.

Beispiel: (c) $\varphi(x,y) = x+y$ und $\frac{Q_x - P_y}{P - Q} = h(x+y)$ hängt nur von $x+y$ ab (beim Vergleich mit (6) beachte $\varphi_x = 1$, $\varphi_y = 1$). Dann löst man

$$\rho'(t) = h(t)\rho(t)$$

und setzt $\mu(x,y) := \rho(x+y)$. Dies ist ein integrierender Faktor.

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$\underbrace{y(1+x)}_{=P(x,y)}\,dx + \underbrace{x(1+y)}_{=Q(x,y)}\,dy = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist wegen $P_y = 1 + x \neq 1 + y = Q_x$ nicht exakt. Es gilt hier

$$\frac{Q_x - P_y}{P - Q} = \frac{y - x}{y + xy - x - xy} = 1 = h(x+y)$$

für $h(t) = 1$. Die zu lösende Differentialgleichung (6) ist also $\rho' = \rho$ mit Lösung $\rho(t) = e^t$. Der Multiplikator ist $\mu(x, y) = \rho(x + y) = e^{x+y} \neq 0$. Die Differentialgleichung

$$y(1 + x)e^{x+y}\,dx + x(1 + y)e^{x+y}\,dy = 0$$

ist in $\mathbb{R}^2$ exakt. Eine Stammfunktion ist $F(x, y) = xye^{x+y}$. Lösungen sind also implizit gegeben durch $xye^{x+y} = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

27.6 Implizite Differentialgleichungen

Implizite Differentialgleichungen haben die Form

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

wobei F eine stetige Funktion von drei Variablen ist, definiert auf einer Menge $G \subset \mathbb{R}^3$. Gesucht ist wieder eine C^1-Funktion $y = \varphi(x)$, definiert auf einem Intervall $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$, die (1) löst, dh dass für alle $x \in \widetilde{I}$ gilt:

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G \quad \text{und} \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

(a) Geraden als Lösungen:
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x, ax + b, a) = 0, \quad x \in I,$$

so ist $\varphi(x) = ax + b$, $x \in I$, eine Lösung.

Beispiel Clairaut-Differentialgleichung $y = xy' + g(y')$, wobei $g : J \to \mathbb{R}$:
Für jedes $a \in J$ ist hier

$$y = \varphi(x) = ax + g(a), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Lösung.

Beispiel d'Alembert-Gleichung $y = xf(y') + g(y')$, wobei $f, g : J \to \mathbb{R}$:
Hier ist

$$y = \varphi(x) = ax + g(a), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Lösung, **falls** $f(a) = a$ gilt, dh falls a ein **Fixpunkt** von f ist.

(b) Weitere Lösungen erhält man manchmal wie folgt:
Suche Funktionen $\psi(t)$, $\chi(t)$ für $t \in I$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit

$$F(\psi(t), \chi(t), t) = 0, \quad t \in I, \tag{2}$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}(t), \quad t \in I. \tag{3}$$

(Hierbei ist t ein Parameter, der für die Ableitung y' steht und $\psi(t) = x$, $\chi(t) = y$, was wegen

$$t = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{\chi}}{\dot{\psi}}$$

zu (3) führt.) Setze dann $x = \psi(t)$, $y = \chi(t)$ für $t \in I$. Dies ist eine Parameterdarstellung einer Lösung von (1), falls $\dot{\psi} \neq 0$ auf I gilt (das bedeutet, dass man lokal $t = \psi^{-1}(x)$ schreiben kann).
Denn wegen $y(x) = \chi(\psi^{-1}(x))$ gilt dann

$$y'(x) = \dot{\chi}(\psi^{-1}(x)) \cdot (\psi^{-1})'(x) = \dot{\chi}(\psi^{-1}(x)) \frac{1}{\dot{\psi}(\psi^{-1}(x))} \stackrel{(3)}{=} \psi^{-1}(x) = t,$$

und wegen (2) ist y dann Lösung von (1).

Beispiel d'Alembert-Gleichung $y = xf(y') + g(y')$: Hier ist etwa

$$F(x, y, y') = xf(y') + g(y') - y$$

und somit

$$\psi(t)f(t) + g(t) = \chi(t), \tag{$\tilde{2}$}$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\psi}(t). \tag{$\tilde{3}$}$$

Wir erhalten daraus

$$t\dot{\psi}(t) \stackrel{(\tilde{3})}{=} \dot{\chi}(t) \stackrel{(\tilde{2})}{=} \dot{\psi}(t)f(t) + \psi(t)\dot{f}(t) + \dot{g}(t)$$

und weiter die lineare Differentialgleichung (für ψ)

$$\dot{\psi}(t)(f(t) - t) + \psi(t)\dot{f}(t) + \dot{g}(t) = 0 \tag{4}$$

Hieraus bestimme man ψ und anschließend χ aus ($\tilde{2}$).

Spezialfall: Für die **Clairaut-Differentialgleichung** ist $f(t) = t$, aus (4) folgt $\psi(t) = -\dot{g}(t)$ und weiter

$$x = \psi(t) = -\dot{g}(t), \qquad y = \chi(t) = -t\dot{g}(t) + g(t).$$

Konkretes Beispiel einer d'Alembert-Gleichung: $y = x(y')^2 + y'$. Hier ist $f(t) = t^2$ und $g(t) = t$.

Geraden: Die Fixpunktgleichung $f(a) = a$ hat nur die Lösungen $a = 0$ und $a = 1$. Wegen $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ führt dies auf die Lösungen

$$y = \varphi(x) = 0 \quad \text{und} \quad y = \varphi(x) = x + 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Weitere Lösungen: Gleichung (4) lautet hier

$$\dot{\psi}(t)(t^2 - t) + 2t\psi(t) + 1 = 0,$$

also für $t \notin \{0, 1\}$:

$$\dot{\psi}(t) + \frac{2}{t-1}\psi(t) = \frac{1}{t - t^2}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist hier

$$\psi(t) = \frac{c}{(t-1)^2}.$$

Durch Variation der Konstanten erhält man eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\psi(t) = \frac{1}{(t-1)^2} \int \frac{(t-1)^2}{t-t^2}\, dt = \frac{-1}{(t-1)^2} \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = -\frac{t}{(t-1)^2} + \frac{\ln|t|}{(t-1)^2}.$$

Somit sind Lösungen in Parameterform gegeben durch

$$x = \psi(t) = \frac{c}{(t-1)^2} - \frac{t}{(t-1)^2} + \frac{\ln|t|}{(t-1)^2}, \quad y = \chi(t) \overset{(\tilde{2})}{=} t^2\psi(t) + t, \quad t \notin \{0, 1\},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

(c) Implizite Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Wir betrachten hier die Differentialgleichung

$$\Phi(y, y', y'') = 0, \tag{5}$$

wobei $\Phi : G \to \mathbb{R}$ stetig ist und $G \subset \mathbb{R}^3$. Eine *Lösung* ist eine C^2-Funktion $\varphi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$, wobei $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit Ende Woche 3

$$(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \in G \quad \text{und} \quad \Phi(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \quad \text{für alle } x \in \widetilde{I}.$$

Schritt 1: Berechne $p(t)$ aus

$$\Phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0. \tag{6}$$

Man setzt also $t = y$ und $p = y'$. Beachte dabei

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \dot{p}p.$$

Die Differentialgleichung (6) ist ein Problem der Form (1).

Schritt 2: Berechne $y(x)$ aus

$$y'(x) = p(y(x)) \qquad \text{(Trennung der Variablen).} \tag{7}$$

Beispiel: $y'' = yy' + (y')^2$ mit $y(1) = 0$ und $y'(1) = -1$. An den Anfangswerten sieht man schon, dass man gleich (6) mit der Anfangsbedingung $p(0) = -1$ lösen muss.

In Schritt 1 ist $\Phi(t, p, z) = tp + p^2 - z$, und man muss $z = p\dot{p}$ setzen. Die Gleichung (6) wird zu

$$\widetilde{F}(t, p, \dot{p}) = tp + p^2 - p\dot{p} = 0.$$

Wir dividieren durch p und erhalten

$$F(t, p, \dot{p}) = t + p - \dot{p} = 0$$

als Gleichung der Form (1). Die Anfangsbedingung ist $p(0) = -1$, also ist die Lösung $p(t) = -1 - t$. Somit lautet (7) hier

$$y'(x) = -1 - y(x).$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ führt auf die Lösung $y(x) = -1 + e^{1-x}$.