Der Ansatz $u = e^{\lambda t}$ für eine Lösung von (2) entspricht dabei dem Ansatz $y = x^\lambda$ für eine Lösung von (1).

Beispiele: 1) $x^2y'' - 3xy' + 7y = 0$. Die beschriebene Substitution $u(t) = y(e^t)$ führt auf

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 7u = 0.$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 7$ hat die Nullstellen $\lambda = 2 \pm i\sqrt{3}$. Aus den beiden linear unabhängigen Lösungen

$$u_1(t) = e^{2t}\sin(\sqrt{3}t), \quad u_2(t) = e^{2t}\cos(\sqrt{3}t)$$

erhält man als Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung:

$$y_1(x) = x^2\sin(\sqrt{3}\ln x), \quad y_2(x) = x^2\cos(\sqrt{3}\ln x), \quad x > 0.$$

2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Die beschriebene Substitution führt auf $\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 4u = 0$ mit scharakteristischem Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Hier ist $\lambda = 2$ doppelte Nullstelle, und wir erhalten als Fundamentalsystem

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2\ln x, \quad x > 0.$$

27.9 Potenzreihenansatz

Für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

mit Koeffizienten $p(x) = \sum_{j=0}^\infty p_jx^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^\infty q_jx^j$, die für $|x| < R$ konvergieren, führt ein Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{j=0}^\infty c_jx^j$$

und Koeffizientenvergleich auf (lineare) Rekursionsformeln für die Koeffizienten c_j. Die Potenzreihe für y konvergiert dann auch für $|x| < R$ (ohne Beweis).

Beispiel: $y'' - x^2y = 0$. Der Ansatz $y(x) = \sum_{j=0}^\infty c_jx^j$ führt auf

$$x^2y(x) = c_0x^2 + c_1x^3 + c_2x^4 + \ldots, \quad y''(x) = 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3x + 4\cdot 3\cdot c_4x^2 + \ldots$$

Hier sind c_0, c_1 frei wählbar (beachte $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$), und wir erhalten:

$$2\cdot 1\cdot c_2 = 0,\ 3\cdot 2\cdot c_3 = 0\ ,4\cdot 3\cdot c_4 = c_0,\ 5\cdot 4\cdot c_5 = c_1,\ \text{etc.}$$

Also ist $c_2 = c_3 = 0$ und

$$c_{k+4} = \frac{c_k}{(k+4)(k+3)} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Lösung y von $y'' - x^2 y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ist also

$$y(x) = x + \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \frac{x^9}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4} + \ldots,$$

denn die Anfangsbedingungen $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, führen zu $c_4 = c_8 = \ldots = 0$ und $c_5 = \frac{1}{5 \cdot 4}$, $c_9 = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}$, etc.

Bemerkung: Allgemeiner kann man einen Potenzreihenansatz natürlich auch für inhomogene Gleichungen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

durchführen, wenn $p(x), q(x), f(x)$ auf $|x| < R$ durch konvergente Potenzreihen gegeben sind.

27.10 Abgewandelter Potenzreihenansatz

In Verallgemeinerung der Eulerschen Differentialgleichung in 27.8 betrachten wir

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

wobei $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$ für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen seien (wir betrachten wie vorher auch nur $p_j, q_j \in \mathbb{R}$). Hier macht man den Ansatz

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

wobei die Koeffizienten c_k und ρ zu berechnen sind. Es ist

$$\begin{aligned}
x^2 y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho)(k-1+\rho) x^{k+\rho}, \\
xp(x)y' &= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j \Big) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j (j+\rho) x^{j+\rho} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j} c_j (j+\rho) \Big) x^{k+\rho}, \\
q(x)y &= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \Big) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\rho} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j} c_j \Big) x^{k+\rho}.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich für $k = 0$ führt auf

$$(\rho(\rho-1) + p_0 \rho + q_0) c_0 = 0,$$

und die *determinierende Gleichung*

$$\underbrace{\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0}_{=:f(\rho)}=0. \tag{2}$$

für ρ. Für $k=1,2,3,\ldots$ erhalten wir

$$(\underbrace{(\rho+k)(\rho+k-1)+p_0(\rho+k)+q_0}_{=f(\rho+k)})c_k=-\sum_{j=0}^{k-1}(p_{k-j}(\rho+j)+q_{k-j})c_j \tag{3}$$

als rekursive Gleichung für die Koeffizienten.

Satz: Es gelte

$$f(\rho)=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2) \quad \text{mit } \rho_1\geq\rho_2, \text{ falls beide reell sind}$$

(ρ_1,ρ_2 sind die Nullstellen der determinierenden Gleichung).

Falls $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$, so gibt es für $0<|x|<R$ ein Fundamentalsystem von (1) der Gestalt

$$y_1(x)=|x|^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k, \quad y_2(x)=A\ln|x|y_1(x)+|x|^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^k,$$

mit $A\in\{0,1\}$, wobei

$$\begin{cases} A=0, c_0\neq 0, d_0\neq 0 & \text{, falls } \rho_1-\rho_2\notin\mathbb{N}_0 \\ A=1, c_0\neq 0, d_0=0 & \text{, falls } \rho_1=\rho_2 \\ A\in\{0,1\}, c_0\neq 0, d_0\neq 0 & \text{, falls } \rho_1-\rho_2\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Falls $\rho_1\notin\mathbb{R}$ ist, so ist $\rho_2=\overline{\rho_1}$ und es gibt ein Fundamentalsystem von (1) der Gestalt

$$y_1(x)=\operatorname{Re}(|x|^{\rho_1}v_1(x)), \quad y_2(x)=\operatorname{Im}(|x|^{\rho_1}v_1(x))$$

mit $v_1(x)$ als für $|x|<R$ konvergenter Potenzreihe und $v_1(0)\neq 0$.

[Wir verweisen auf → Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Abschnitt 27.]

Bemerkung: Für den Fall komplexer Exponenten $\rho=\sigma+i\tau$ mit $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$ beachte man im Vergleich mit 27.8, dass für $x>0$ gilt:

$$x^\rho=e^{\rho\ln x}=e^{\sigma\ln x}e^{i\tau\ln x}=x^\sigma(\cos(\tau\ln x)+i\sin(\tau\ln x))=x^\sigma\cos(\tau\ln x)+ix^\sigma\sin(\tau\ln x).$$

Beispiel: $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ (Besselsche Differentialgleichung der Ordnung 1/2). Der Ansatz $y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^{j+\rho}$ führt auf

$$\left(\rho^2-\frac{1}{4}\right)c_0x^\rho+\left((\rho+1)^2-\frac{1}{4}\right)c_1x^{\rho+1}+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\left((\rho+j)^2-\frac{1}{4}\right)c_j+c_{j-2}\right)x^{\rho+j}=0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die determinierende Gleichung

$$\rho^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{mit Nullstellen } \rho_1 = \tfrac{1}{2},\, \rho_2 = -\tfrac{1}{2}$$

und

$$\left((\rho+1)^2 - \frac{1}{4}\right) c_1 = 0, \qquad \left((\rho+j)^2 - \frac{1}{4}\right) c_j = -c_{j-2}, j \geq 2.$$

Für $\rho_1 = \frac{1}{2}$ erhalten wir $c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = 0$ und

$$c_j = -\frac{c_{j-2}}{j(j+1)}, \quad j = 2, 4, 6, \ldots,$$

also

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2k+1)} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k+1)!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Mit $c_0 = 1$ ist schließlich

$$y_1(x) = x^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = \frac{1}{x^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{1}{x}} \sin x, \quad x > 0.$$

Wir sind im Fall $\rho_1 - \rho_2 = 1 \in \mathbb{N}$ des Satzes und der Ansatz

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j$$

führt auf ähnliche Weise wie oben zu $y_2(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \cos x$. Hier hat man also $A = 0$.

Bemerkung: Der allgemeinere Fall

$$x^2 r(x) y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0$$

mit $p(x)$, $q(x)$ wie oben und $r(x) = \sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j$ und $r_0 \neq 0$ (!) lässt sich durch Multiplikation mit $\frac{1}{r(x)}$ auf (1) zurückführen. Auch

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) \widetilde{p}(x) y' + \widetilde{q}(x) y = 0$$

mit für $|x - x_0| < R$ konvergenten Potenzreihen $\widetilde{p}(x)$ und $\widetilde{q}(x)$ führt durch Translation auf (1).

Ende Woche 6