28 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

28.1 Das Problem

Sei $D \subset \mathbb{R}^\times \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir schreiben Punkte aus D als $(x, \vec{y})$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und betrachten

$$\vec{y}\,' = F(x, \vec{y}) \tag{1}$$

Eine *Lösung* von (1) ist eine stetig differenzierbare Funktion $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit

$$(x, \vec{y}(x)) \in D \qquad \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = F(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Wir erinnern dabei an $\vec{y}\,'(x) = \frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$.

Entsprechend betrachten wir Anfangswertprobleme, wobei man für gegebene $(x_0, \vec{y}_0) \in D$ Lösungen $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ von (1) mit der Bedingung $x_0 \in I$ und $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ sucht.

Beispiele: 1) Das Lotka-Volterrasche Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u - \beta uv \\ v' &= -\gamma v + \delta uv \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ beschreibt das Wachstum einer Räuberpopulation v (z.B. Füchse), die sich von einer Beutepopulation u (z.B. Hasen) ernährt: ohne Räuber vermehrt sich u exponentiell, während v ohne Beute exponentiell ausstirbt. Begegnungen von Räuber und Beute (proportional zum Produkt uv) führen zu Wachstum bei v und zur Abnahme bei u. Setzt man $\vec{y} := \binom{u}{v}$, also $y_1 = u$ und $y_2 = v$, so erhält man (1) für

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -\alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \\ -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

2) Man kann explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form (1) umschreiben. Sei etwa $I = [0, T]$ und seien $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= f(x), \quad x \in I \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) &= \beta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ist via $u := y$, $v := y'$ äquivalent zum Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rclcrcl} u' & = & v & , & u(0) & = & \alpha \\ v' & = & -p(x)v - q(x)u + f(x) & , & v(0) & = & \beta. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Setzt man $F(x,u,v) := \begin{pmatrix} v \\ -a(x)v - b(x)u + f(x) \end{pmatrix}$, so ist $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, und (3) ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = F(x,u,v), \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

28.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Seien D und F wie in 28.1, sowie $(x_0, \vec{y}_0) \in D$. Sei F bzgl. der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in D stetig partiell differenzierbar. Dann ist das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{y}\,' & = & F(x,\vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) & = & \vec{y}_0 \end{array}\right\} \tag{AWP}$$

eindeutig lösbar, dh

(i) Es gibt eine Lösung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ von (AWP).
(ii) Sind $\vec{y} : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\vec{z} : I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von (AWP), so stimmen $\vec{y}$ und $\vec{z}$ auf $I_1 \cap I_2$ überein.

Zusatz: Es gibt eine eindeutige Lösung $y : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ mit *maximalem* Existenzintervall $I_{\max}$. Diese *maximale* Lösung verläuft "von Rand zu Rand", was im Falle $D = [x_0, a) \times \mathbb{R}^n$ bedeutet, dass $\sup I_{\max} = a$ (globale Existenz) oder $\lim_{x \to \sup I_{\max}} \|\vec{y}(x)\| = \infty$ (Blow-up in endlicher Zeit).

Beispiele: 1) Das Lotka-Volterrasche Räuber-Beute-Modell hat für alle Anfangswerte $\binom{u(0)}{v(0)} \in \mathbb{R}^2$ eine lokal existierende, eindeutige Lösung $\binom{u(x)}{v(x)}$. Man kann zeigen, dass für $u(0), v(0) \geq 0$ die Lösung global existiert und $u(x), v(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ gilt.

2) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2) in 28.1 hat für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine lokal existierende, eindeutige Lösung $y(x)$. Diese Lösung existiert auf ganz $[0, T]$.

3) Das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ ist nicht eindeutig lösbar. Hier ist $n = 1$ und $F(y) = \sqrt{|y|}$ ist in 0 nicht differenzierbar.

28.3 Bemerkungen zum Beweis (im wesentlichen für $n = 1$):

Schritt 1: Ist $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, so gilt

$\vec{y}$ ist stetig differenzierbar und Lösung von (AWP) genau dann, wenn $\vec{y}$ stetig ist und

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \vec{y}(t))\, dt, \quad x \in I. \tag{FP}$$

Diese Gleichung ist eine *Fixpunktgleichung*, zu deren Lösung man *Fixpunktsätze* verwenden kann (s.u.).

Schritt 2: Für jedes beschränkte, abgeschlossene Rechteck $I \times J \subseteq D$ gibt es eine Konstante $L > 0$ so, dass

$$|F(x, y) - F(x, \widetilde{y})| \leq L|y - \widetilde{y}|, \quad \text{für alle } x \in I,\ y, \widetilde{y} \in J.$$

(Man sagt, dass F lokal einer *Lipschitzbedingung* bzgl. der zweiten Komponente genügt).

Schritt 3 (Eindeutigkeit): Wir betrachten $I = [0, a]$, $J = [-b, b]$ und erinnern an das

Gronwall-Lemma (17.9): Sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gebe $\alpha \geq 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$h(x) \leq \beta + \alpha \int_0^x h(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Dann gilt $h(x) \leq \beta e^{\alpha x}$ für alle $x \in I$.

Seien nun $y, z : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von (FP). Das Lemma wird angewendet auf die stetige Funktion $h(x) = |y(x) - z(x)|$. Wir haben

$$\begin{aligned} 0 \leq h(x) &= \left| \int_0^x F(t, y(t)) - F(t, z(t))\, dt \right| \\ &\leq \int_0^x |F(t, y(t)) - F(t, z(t))|\, dt \\ &\leq L \int_0^x \underbrace{|y(t) - z(t)|}_{=h(t)}\, dt, \end{aligned}$$

also $\beta = 0$ und $\alpha = L$, und erhalten $h \leq 0$ auf I.

Schritt 4: Die in Schritt 3 gezeigte Abschätzung ermöglicht die Anwendung des folgenden Satzes zur Lösung der Fixpunktgleichung (FP).

28.4 Banachscher Fixpunktsatz: Sei $B \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes, dh eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$, in dem jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Seien $T : B \to B$ und $0 \leq \alpha < 1$ so, dass

$$\|T(x) - T(\widetilde{x})\| \leq \alpha \|x - \widetilde{x}\| \quad \text{für alle } x, \widetilde{x} \in B \tag{1}$$

gilt. Dann hat T genau einen Fixpunkt $x^* \in B$, und für jedes $x_0 \in B$ konvergiert die durch $x_k := T(x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, rekursiv definierte Folge (x_k) gegen x^*.

Bemerkung: Der Satz gibt **Existenz** und **Eindeutigkeit** eines Fixpunktes. Dieser Fixpunkt kann durch *Fixpunktiteration* gefunden werden. Einfache Beispiele für Banachräume X sind $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{R}^n$.

Anwendung: Zur Lösung von (FP) betrachten wir $X := C[0, a]$ mit der Supremumsnorm $\|g\| := \sup\{|g(x)| : x \in [0, a]\}$ und definieren

$$(Tg)(x) = y_0 + \int_0^x F(t, g(t))\, dt, \quad x \in [0, a].$$

Die in 28.3 Schritt 3 gezeigte Abschätzung zeigt

$$|(Tg)(x) - (T\widetilde{g})(x)| \le L \int_0^x |g(t) - \widetilde{g}(t)|\, dt \le Lx\|g - \widetilde{g}\|, \quad x \in [0, a],$$

also

$$\|T(g) - T(\widetilde{g})\| \le La\|g - \widetilde{g}\|.$$

Für $La < 1$ kann man den Satz anwenden, wenn B geeignet gewählt wird (man hat ja diese Abschätzung nur für $g, \widetilde{g}$ mit $\|g\|, \|\widetilde{g}\| \le b$).

Beispiel (zur Fixpunktiteration): Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

auf $I = [0, \infty)$ mit Anfangswert $\binom{u(0)}{v(0)} = \binom{\alpha}{\beta}$. Die Iteration beginnen wir mit $\binom{u_0}{v_0}(x) = \binom{\alpha}{\beta}$. Man zeigt leicht, dass für $k \ge 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \frac{x^3}{3!} + \ldots + \begin{cases} \binom{\alpha}{\beta} \frac{x^k}{k!} & , k \text{ gerade} \\ \binom{\beta}{\alpha} \frac{x^k}{k!} & , k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \binom{u_k}{v_k}(x)$ existiert für jedes x und ist gleich

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \cosh x + \beta \sinh x \\ \beta \cosh x + \alpha \sinh x \end{pmatrix}.$$

Das ist auch die Lösung des Differentialgleichungssystems. Ende Woche 7

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes. Eindeutigkeit: Sind $x^*, \widetilde{x}^* \in B$ Fixpunkte von T, so folgt wegen (2):

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| = \|T(x^*) - T(\widetilde{x}^*)\| \le \alpha\|x^* - \widetilde{x}^*\|.$$

Wegen $\alpha < 1$ ist also $\|x^* - \widetilde{x}^*\| = 0$, dh $x^* = \widetilde{x}^*$.

Existenz: Sei $x_0 \in B$ und (x_k) die zugehörige Iterationsfolge. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k), \tag{2}$$

und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt nach (2):

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \leq \alpha \|x_k - x_{k-1}\| \leq \ldots \leq \alpha^k \|x_1 - x_0\|.$$

Wegen $\alpha \in [0, 1)$ gilt somit $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\| < \infty$. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe, und nach (2) konvergiert dann auch die Folge (x_n) gegen ein x^*. Da T nach (2) stetig ist, folgt

$$T(x^*) = T(\lim_n x_n) = \lim_n T(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

dh x^* ist Fixpunkt von T.

Weitere Anwendung (Taschenrechner): $X := \mathbb{R}$, $B := [\cos 1, 1]$, $T(x) = \cos x$. Es gilt $T : B \to B$ und nach Hauptsatz

$$|T(x) - T(\widetilde{x})| = |\cos(x) - \cos(\widetilde{x})| \leq \underbrace{\sin 1}_{=:\alpha} |x - \widetilde{x}|$$

für alle $x, \widetilde{x} \in B$. Also besitzt $T = \cos$ genau einen Fixpunkt in B, den man als Grenzwert einer Fixpunktiteration erhält (mit beliebigem Startwert in B). Man kann sogar mit beliebigem $x_0 \in [0, \pi/2]$ starten, da $\cos^2([0, \pi/2]) = [\cos 1, 1]$ ist.