Bemerkung: Der Satz gibt **Existenz** und **Eindeutigkeit** eines Fixpunktes. Dieser Fixpunkt kann durch *Fixpunktiteration* gefunden werden. Einfache Beispiele für Banachräume X sind $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{R}^n$.

Anwendung: Zur Lösung von (FP) betrachten wir $X := C[0,a]$ mit der Supremumsnorm $\|g\| := \sup\{|g(x)| : x \in [0,a]\}$ und definieren

$$(Tg)(x) = y_0 + \int_0^x F(t, g(t))\, dt, \quad x \in [0,a].$$

Die in 28.3 Schritt 3 gezeigte Abschätzung zeigt

$$|(Tg)(x) - (T\widetilde{g})(x)| \le L \int_0^x |g(t) - \widetilde{g}(t)|\, dt \le Lx\|g - \widetilde{g}\|, \quad x \in [0,a],$$

also

$$\|T(g) - T(\widetilde{g})\| \le La\|g - \widetilde{g}\|.$$

Für $La < 1$ kann man den Satz anwenden, wenn B geeignet gewählt wird (man hat ja diese Abschätzung nur für $g, \widetilde{g}$ mit $\|g\|, \|\widetilde{g}\| \le b$).

Beispiel (zur Fixpunktiteration): Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

auf $I = [0, \infty)$ mit Anfangswert $\binom{u(0)}{v(0)} = \binom{\alpha}{\beta}$. Die Iteration beginnen wir mit $\binom{u_0}{v_0}(x) = \binom{\alpha}{\beta}$. Man zeigt leicht, dass für $k \ge 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \frac{x^3}{3!} + \ldots + \begin{cases} \binom{\alpha}{\beta} \frac{x^k}{k!} & , k \text{ gerade} \\ \binom{\beta}{\alpha} \frac{x^k}{k!} & , k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \binom{u_k}{v_k}(x)$ existiert für jedes x und ist gleich

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \cosh x + \beta \sinh x \\ \beta \cosh x + \alpha \sinh x \end{pmatrix}.$$

Das ist auch die Lösung des Differentialgleichungssystems. Ende Woche 7

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes. Eindeutigkeit: Sind $x^*, \widetilde{x}^* \in B$ Fixpunkte von T, so folgt wegen (2):

$$\|x^* - \widetilde{x}^*\| = \|T(x^*) - T(\widetilde{x}^*)\| \le \alpha\|x^* - \widetilde{x}^*\|.$$

Wegen $0 \le \alpha < 1$ ist also $\|x^* - \widetilde{x}^*\| = 0$, dh $x^* = \widetilde{x}^*$.

Existenz: Sei $x_0 \in B$ und (x_k) die zugehörige Iterationsfolge. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k), \tag{2}$$

und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt nach (2):

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \leq \alpha \|x_k - x_{k-1}\| \leq \ldots \leq \alpha^k \|x_1 - x_0\|.$$

Wegen $\alpha \in [0,1)$ gilt somit $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\| < \infty$. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe, und nach (2) konvergiert dann auch die Folge (x_n) gegen ein x^*. Da T nach (2) stetig ist, folgt

$$T(x^*) = T(\lim_n x_n) = \lim_n T(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

dh x^* ist Fixpunkt von T.

Weitere Anwendung (Taschenrechner): $X := \mathbb{R}$, $B := [\cos 1, 1]$, $T(x) = \cos x$. Es gilt $T : B \to B$ und nach Hauptsatz

$$|T(x) - T(\widetilde{x})| = |\cos(x) - \cos(\widetilde{x})| \leq \underbrace{\sin 1}_{=:\alpha} |x - \widetilde{x}|$$

für alle $x, \widetilde{x} \in B$. Also besitzt $T = \cos$ genau einen Fixpunkt in B, den man als Grenzwert einer Fixpunktiteration erhält (mit beliebigem Startwert in B). Man kann sogar mit beliebigem $x_0 \in [0, \pi/2]$ starten, da $\cos^2([0, \pi/2]) = [\cos 1, 1]$ ist.

28.5 Existenzsatz von Peano

Seien D und F wie in 28.1 und sei $(x_0, \vec{y}_0) \in D$. Dann hat das Anfangswertproblem (AWP) eine Lösung, und es gibt eine maximale (dh auf kein größeres Intervall fortsetzbare) Lösung $\vec{y} : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ von (AWP), die "von Rand zu Rand verläuft".

Bemerkung: Lösungen des Anfangswertproblems (AWP) sind unter diesen Voraussetzungen i.a. nicht eindeutig. Insbesondere müssen auch die Existenzintervalle maximaler Lösungen zum selben Anfangswert nicht übereinstimmen.

Zusatz/Nachtrag zu 28.2 und 28.5: Ist $D = I \times \mathbb{R}^n$ und gibt es $C \geq 0$ mit

$$\|F(x, \vec{y})\| \leq C(1 + \|\vec{y}\|) \quad \text{für alle } \vec{y} \in \mathbb{R}^n,$$

so existieren die maximalen Lösungen auf I.

29 Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir bezeichnen hier die unabhängige Variable nicht mit x, sondern mit t.

29.1 Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig (letzteres bedeutet, dass in der Darstellung $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=1}^n$ alle Funktionen $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind). Ist $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \vec{y}\,' &= A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

für jedes $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\vec{\phi} : I \to \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wende Satz 28.2 (und Nachtrag!) an auf $D = I \times \mathbb{R}^n$ und $F(t, \vec{y}) = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ und beachte $\frac{\partial}{\partial \vec{y}} F(t, \vec{y}) = A(t)$.

Struktur der Lösungen: Für Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I. \tag{2}$$

gelten die uns schon von anderen linearen Differentialgleichungen vertrauten Eigenschaften:

Die **allgemeine** Lösung von (2) erhält man durch Addition einer **speziellen** (*partikulären*) Lösung des *inhomogenen* Systems (2) und der **allgemeinen** Lösung des zugehörigen *homogenen* Systems

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}, \quad t \in I. \tag{3}$$

Bemerkung: Der Lösungsraum des homogenen Systems (3)

$$\mathscr{L}_0 := \{\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n : \ \vec{y}\,' = A(t)\vec{y}, \ t \in I\}$$

ist ein reeller Vektorraum der Dimension n.

Eine Basis $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ von $\mathscr{L}_0$ heißt *Fundamentalsystem* für (3) auf I. Ist $\vec{\phi}_1, \ldots \vec{\phi}_n$ ein Fundamentalsystem, dh eine Basis von $\mathscr{L}_0$, so erhält man **jede** Lösung von (3) durch eine *Linearkombination*

$$c_1\vec{\phi}_1 + c_2\vec{\phi}_2 + \ldots + c_n\vec{\phi}_n$$

für geeignete $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Wronski-Determinante: Für $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n \in \mathscr{L}_0$ heißt

$$w : I \to \mathbb{R}, \quad w(t) := \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \ldots & \vec{\phi}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

die *Wronski-Determinante* des Systems $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$. Es sind äquivalent:

- die Funktionen $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ bilden ein Fundamentalsystem;
- es ist $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$;
- es ist $w(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$.

Bilden $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ ein Fundamentalsystem von (3), so bezeichnen wir auch

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \ldots & \vec{\phi}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

als Fundamentalsystem. Beachte, dass $\Phi(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist (wegen $\det \Phi(t) = w(t) \neq 0$ für $t \in I$). Außerdem gilt

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad t \in I,$$

und für $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + \ldots + c_n\vec{\phi}_n(t) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \ldots & \vec{\phi}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi(t)\vec{c}, \quad t \in I,$$

dh man erhält alle Lösungen von (3) durch Multiplikation der Funktion $\Phi(t)$ mit festen Vektoren $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Variation der Konstanten: Ist $\Phi(t)$ ein Fundamentalsystem für (3) auf I, so macht man für eine Lösung $\vec{y}(t)$ von (2) den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c}(t), \quad t \in I,$$

und erhält

$$A(t)\Phi(t)\vec{c}(t) + \vec{b}(t) \stackrel{!}{=} \vec{y}\,'(t) = A(t)\Phi(t)\vec{c}(t) + \Phi(t)\vec{c}\,'(t),$$

also

$$\Phi(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{c}\,'(t) = \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t).$$

Die eindeutige Lösung von (1) ist dann gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \quad t \in I.$$

Man vergleiche dies mit der Formel aus 27.1.

Bemerkung: Die Aussagen gelten entsprechend, wenn $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\vec{b} : I \to \mathbb{C}^n$ stetig sind. In diesem Fall gilt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$, und der Lösungsraum $\mathscr{L}_0$ des homogenen Systems ist ein *komplexer* Vektorraum der Dimension n.

29.2 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und wollen ein Fundamentalsystem bestimmen.

Grundlegende Beobachtung: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist durch

$$\vec{\phi}(t) := e^{\lambda t}\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Lösung von (1) gegeben. Ende Woche 8

Folgerung: Gibt es eine Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so ist durch

$$\vec{\phi}_j(t) := e^{\lambda_j t}\vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

ein Fundamentalsystem $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ von (1) gegeben.

Bemerkung (Erinnerung): Es gibt genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von A, wenn A diagonalisierbar ist, dh genau dann, wenn für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Das ist z.B. immer der Fall, wenn A n **verschiedene** Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hat.

Beispiel: Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(\lambda - 1)^2.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und der Eigenraum zum Eigenwert 1 wird aufgespannt von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ein Fundamentalsystem von (1) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_3(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reelle Matrizen mit nicht-reellen Eigenwerten: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komplex diagonalisierbar und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{\vec{v}}$. Die linear unabhängigen komplexwertigen Lösungen $e^{\lambda t}\vec{v}$ und $e^{\overline{\lambda}t}\overline{\vec{v}}$ im Fundamentalsystem ersetze man durch die linear unabhängigen reellwertigen Lösungen

$$\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right), \quad \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right).$$

Beispiel: Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\pm i$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$, und es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem von (1) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$