29.2 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und wollen ein Fundamentalsystem bestimmen.

Grundlegende Beobachtung: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist durch

$$\vec{\phi}(t) := e^{\lambda t}\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Lösung von (1) gegeben.

Ende Woche 8

Folgerung: Gibt es eine Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, so ist durch

$$\vec{\phi}_j(t) := e^{\lambda_j t}\vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \dots, n,$$

ein Fundamentalsystem $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_n$ von (1) gegeben.

Bemerkung (Erinnerung): Es gibt genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von A, wenn A diagonalisierbar ist, dh genau dann, wenn für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Das ist z.B. immer der Fall, wenn A n **verschiedene** Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ hat.

Beispiel: Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(\lambda - 1)^2.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und der Eigenraum zum Eigenwert 1 wird aufgespannt von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ein Fundamentalsystem von (1) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\phi}_3(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reelle Matrizen mit nicht-reellen Eigenwerten: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komplex diagonalisierbar und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{\vec{v}}$. Die linear unabhängigen komplexwertigen Lösungen $e^{\lambda t}\vec{v}$ und $e^{\overline{\lambda} t}\overline{\vec{v}}$ im Fundamentalsystem ersetze man durch die linear unabhängigen reellwertigen Lösungen

$$\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right), \quad \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right).$$

Beispiel: Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\pm i$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$, und es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem von (1) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

29.3 Fundamentalsysteme für nicht-diagonalisierbare Matrizen

Wir betrachten weiter das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{H}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nicht diagonalisierbar ist.

Man führe das folgende Verfahren für jeden Eigenwert von A durch:

> Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit m (dh λ_0 ist m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$).
>
> Man bestimme eine Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des *Hauptraumes* von A zum Eigenwert λ_0, dh eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(A - \lambda_0 I)^m$ (selbst wenn der Eigenraum $\mathrm{Kern}\,(A - \lambda I)$ von A zum Eigenwert λ eine Dimension $< m$ hat, hat der entsprechende Hauptraum immer die Dimension m). Dazu bestimme man zunächst eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(A - \lambda_0 I)$, erweitere diese zu einer Basis von $\mathrm{Kern}\,(A - \lambda_0 I)^2$ usw. Zweckmäßigerweise bestimmt man dabei in jedem Schritt Vektoren $\vec{w}$ mit
>
> $$(A - \lambda_0 I)\vec{w} = \vec{v},$$

wobei $\vec{v}$ aus dem Spann der bisher gefundenen Vektoren ist (und $\vec{v} = 0$ im ersten Schritt).

Dann sind $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_m$, gegeben durch

$$\vec{\phi}_j(t) = e^{\lambda_0 t}(\vec{v}_j + t(A-\lambda_0 I)\vec{v}_j + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda_0 I)^2\vec{v}_j + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda_0 I)^{m-1}\vec{v}_j$$

für $j = 1, 2, \ldots, m$, linear unabhängige Lösungen von (H).

Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, beachte man folgendes:

Ist in der obigen Situation $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so bestimmt man eine reelle Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ des Hauptraumes und erhält so reellwertige Funktionen $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_m$.

Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, so ist auch $\overline{\lambda_0}$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit m. In diesem Fall erhält man $2m$ linear unabhängige reellwertige Lösungen von (H) durch

$$\mathrm{Re}\,\vec{\phi}_1,\ \mathrm{Re}\,\vec{\phi}_2, \ldots,\ \mathrm{Re}\,\vec{\phi}_m,\ \mathrm{Im}\,\vec{\phi}_1,\ \mathrm{Im}\,\vec{\phi}_2, \ldots,\ \mathrm{Im}\,\vec{\phi}_m.$$

Der Eigenwert $\overline{\lambda_0}$ wird in dem Verfahren dann nicht mehr berücksichtigt!

Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2.

Weiter gilt

$$\mathrm{Kern}\,(A-I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \mathrm{Kern}\,(A-I)^2 = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Also ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad ,\vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}, \quad ,\vec{\phi}_3(t) = \Big[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big]e^{t}.$$

29.4 Asymptotisches Verhalten

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir interessieren uns für das Verhalten von Lösungen von (H) für $t \to \infty$. Aus der Gestalt der Funktionen im Fundamentalsystem aus 29.3 erhalten wir den

Satz: (1) Alle Lösungen von (H) konvergieren gegen Null für $t \to \infty$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.

(2) Alle Lösungen von (H) bleiben für $t \to \infty$ beschränkt genau dann, wenn $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte λ von A gilt und wenn für jeden Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

29.5 Die Matrixexponentialfunktion

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\exp(tA) := e^{tA} := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l}{l!}.$$

Die Reihe konvergiert dabei in dem Sinne, dass für jedes (j,k) der Eintrag der Matrix $\sum_{l=0}^{N} \frac{t^l A^l}{l!}$ an der Stelle (j,k) konvergiert.

[Zum Beweis bestimme man $C \geq 0$ so, dass $\|A\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt (das gilt z.B. für $C = \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{1/2}$). Dann ist $\|A^l\vec{x}\| \leq C^l\|\vec{x}\|$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left\|\frac{t^l A^l \vec{x}}{l!}\right\| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|t|^l C^l \|\vec{x}\|}{l!} = e^{C|t|}\|\vec{x}\| < \infty,$$

so dass die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l \vec{x}}{l!}$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^n$ absolut konvergiert.]

Eigenschaften: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(1) Ist $AB = BA$, so gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Beweis wie beim Cauchyprodukt, wobei man beachtet, dass (wegen $AB = BA$!) gilt

$$(A+B)^l = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} A^j B^{l-j}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Die Matrix e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(3) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$.

(4) Für jedes $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$ definiert $\vec{\phi}(t) := e^{tA}\vec{y}_0$ eine Lösung des homogenen Systems (H) mit Anfangswert $\vec{\phi}(0) = \vec{y}_0$. Mit anderen Worten:

e^{tA} **ist dasjenige Fundamentalsystem** $\Phi(t)$ **von** (H) **mit** $\Phi(0) = I$.

Bemerkung: Sind $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ so, dass $(A-\lambda I)^m\vec{v} = 0$ gilt, so haben wir

$$e^{tA}\vec{v} = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\vec{v} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

womit klar ist, dass die in 29.3 angegebenen $\vec{\phi}_j$ Lösungen von (H) sind. Ende Woche 9

Beispiele: 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$: Es gilt $A^2 = -\omega^2 I$, also für $k \in \mathbb{N}$:

$$A^{2k+1} = (-1)^k \omega^{2k} A, \qquad A^{2k} = (-1)^k \omega^{2k} I.$$

Somit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega t)^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega t)^{2k+1} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\omega t)^{2k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\omega t)^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Beachte $e^{0A} = I$ und

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \\ -\omega \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} = A\, e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Es gilt

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N.$$

Wegen $(\lambda I)N = N(\lambda I)$ ist also

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}.$$

Nun hat N^k für $k = 1, \ldots, n-1$ auf der k-ten Nebendiagonalen Einsen und sonst Nullen, und N^k ist die Nullmatrix für $k \geq n$. Somit ist

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$