KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann

WS 2009/2010
26.11.2009

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 18

Bestimmen Sie für folgende lineare Differentialgleichungen die Lösungsmenge mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

a) $y'(x) + xy(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

b) $(1 + x^2)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 19

Wir betrachten folgende Differentialgleichung:

$$x^2 y''(x) + \frac{1}{2}(1 + x)xy'(x) - xy(x) = 0 \quad (x > 0).$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem mit Hilfe eines abgewandelten Potenzreihenansatzes.

Aufgabe 20

Wir betrachten die sogenannte **Laguerresche Differentialgleichung**

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + ny(x) = 0 \quad (x > 0),$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante ist.

a) Bestimmmen Sie eine nichttriviale Lösung, z.B. mit Hilfe des abgewandelten Potenzreihenansatzes der Vorlesung.

b) Wie lautet der Ansatz für eine zweite linear unabhängige Lösung?

— bitte wenden —

Aufgabe 21

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, I ein offenes Intervall, das a enthält und $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten Anfangswertprobleme auf I von der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(a) = b.$$

Wir wollen im folgenden die Lösung iterativ bestimmen und konstruieren dazu eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen $I \to \mathbb{R}$:
Wir setzen $y_0(x) = b$, und für $n \geqslant 0$, $x \in I$

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, y_n(t))dt.$$

a) Es sei $I = \mathbb{R}$ und das AWP gegeben durch

$$y'(x) = xy(x),\ y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, sowie die Grenzfunktion $y(x) := \lim_n y_n(x)$. Wie lautet die Lösung des AWPs?

b) Es sei $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und das AWP gegeben durch

$$y'(x) = x^2 + xy^2(x),\ y(0) = 0.$$

Bestimmen Sie y_n für $n = 0, 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion $y(x) = \lim_n y_n(x)$, $(x \in I)$ existiert und eine Lösung des AWPs ist.

c) Es sei $I = (-1, 1)$ und das AWP gegeben durch

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(0) = 0,$$

wobei

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = 0,\ |y| \leqslant 1, \\ 2x & , 0 < |x| \leqslant 1,\ -1 \leqslant y < 0, \\ 2x - 4\frac{y}{x} & , 0 < |x| \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ -2x & , 0 < |x| \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y. \end{cases}$$

i) Vergewissern Sie sich, dass f stetig ist.

ii) Zeigen Sie, dass es zwei Funktionen z_1 und z_2 so gibt, dass $y_n = z_1$ für n ungerade und $y_n = z_2$ für n gerade,$n \geqslant 2$.

iii) Sind z_1 und z_2 Lösungen des AWPs auf I?