5. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 22

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass Anfangswertprobleme $y'(x) = f(x, y(x))$ mit stetiger Funktion f immer eine Lösung besitzen (Existenzsatz von Peano). In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass die Lösung nicht eindeutig zu sein braucht, und dass auch die maximalen Lösungen verschiedene Existenzintervalle haben.
Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{|y|} & , |y| \leqslant 1 \\ y^2 & , |y| > 1 \end{cases}$$

und dem Anfangswert $y(0) = 0$.

a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem Lösungen besitzt.

b) Finden Sie die Lösungen des Anfangswertproblems.

Anleitung: Zeigen Sie, dass jede Lösung monoton wachsend ist.

Es sei $I = [x_0, x_0 + \delta)$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$. Wie lautet y,

(i) falls $|y(x)| \geqslant 1$ für alle $x \in I$ gilt?

(ii) falls $0 < y(x) \leqslant 1$ für alle $x \in I$ gilt?

Bauen Sie nun aus diesen beiden Lösungen, und einer dritten trivialen Lösung der Differentialgleichung die maximalen Lösungen $y : [0, a) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems zusammen.

Aufgabe 23

Es sei I ein Intervall und a_{jk} $(j, k = 1, 2)$ stetige Funktionen auf I. Ferner seien die auf I definierten Funktionen

$$y_j(t) = \begin{pmatrix} y_{j1}(t) \\ y_{j2}(t) \end{pmatrix}, \quad (j = 1, 2)$$

Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Die Wronskische Determinante ist dann durch

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass w die Differentialgleichung $w'(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t))w(t)$ erfüllt.

b) Folgern Sie die Darstellung

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)] d\tau \right) \quad (t \in I)$$

mit einem fest gewählten $t_0 \in I$.

Aufgabe 24

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der folgenden homogenen Differentialgleichungssysteme

a)

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = Ay(t) + b(t),\ y(0) = y_0$$

wobei die Matrix A, die Funktion b und der Anfangswert y_0 gegeben sind durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 26

Es ist der 24.12.09. Der Weihnachtsmann belädt seinen Rentierschlitten mit den Geschenken für den Bezirk Karlsruhe. Diese liegen in einem Lagerraum, $10m \times 10m$ groß. Als er sich nach dem letzten Geschenk bückt, fällt ihm sein Lagerraumplan (Maßstab 1:50), unerlässlich für die korrekte Zustellung der Geschenke, aus der Manteltasche und landet auf dem Lagerraumboden!
Glücklicherweise bemerkt Weihnachtswichtel Oberschlau das Missgeschick. Gerade als er den Weihnachtsmann darauf aufmerksam machen will, geht ihm folgendes durch den Kopf:
Jeder Punkt x des Lagerraumbodens wird auf dem Lagerraumplan auf einen Punkt $T(x)$ abgebildet. Da der Plan nun auf dem Boden liegt, frägt Oberschlau sich, ob es einen Punkt x^* gibt, dessen Bildpunkt $T(x^*)$ genau über x^* liegt. In seinen Überlegungen vertieft, ist Oberschlau drauf und dran zu vergessen, dem Weihnachtsmann den Plan zurückzustecken.

Retten Sie Weihnachten und zeigen Sie Oberschlau, dass es genau einen solchen Punkt x^* gibt!

Anleitung:

Setze $B = [0, 10] \times [0, 10] \subset X = \mathbb{R}^2$, was den Lagerraumboden darstellen soll.
Es sei $T : B \to B$ die Abbildung, die den Lagerraum auf seinen Plan abbildet. Sie ist gegeben durch $T = L \circ D \circ M$, wobei $M, D, L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert sind durch

$$M(x) = \frac{1}{50} \cdot x \quad \text{(Maßstab des Plans)},$$

$$D(x) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot x$$

(Plan landet bezüglich des Lagerraums um den Winkel φ gedreht auf dem Boden),

$$L(x) = x + a \quad (a \in B \text{ beschreibt die Position des Plans im Lagerraum}).$$

Zeigen Sie, dass

$$\|T(x) - T(\tilde{x})\| \leqslant \alpha \|x - \tilde{x}\| \quad (x, \tilde{x} \in B)$$

gilt mit $\alpha = \frac{1}{50}$ und der Euklid-Norm $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Schlussfolgern Sie nun mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes aus der Vorlesung.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!