

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 27

- a) Bestimmen Sie die Matrixexponentialfunktion $\exp(tA)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zeigen Sie, dass die Matrixexponentialfunktion $\exp(tA)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} a &= 1/4 \exp(t) + 1/4 \exp(-t) + 1/2 \cos(t), \\ b &= -1/2 \sin(t) - 1/4 \exp(-t) + 1/4 \exp(t), \\ c &= 1/4 \exp(t) + 1/4 \exp(-t) - 1/2 \cos(t), \\ d &= 1/4 \exp(t) - 1/4 \exp(-t) + 1/2 \sin(t). \end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst ein paar Potenzen von A : A^2, A^3, \dots

Aufgabe 28

Wir betrachten die quasilineare Gleichung

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) \partial_x u(x, t) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$.

a) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & , x > 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die Charakteristiken $\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}$ der Gleichung, und leiten Sie daraus die Lösung des Problems mit dem gegebenen f her.

b) Was passiert, wenn f stetig differenzierbar, aber nicht monoton wachsend ist?

Aufgabe 29

Wir betrachten die lineare Gleichung

$$\partial_t u(x, t) + (\cos t) \partial_x u(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in Q)$$

mit $Q = [0, 2\pi] \times [0, \infty)$.

- a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.
- b) Betrachten Sie nun den Rand $R = \{0, 2\pi\} \times [0, \infty) \cup [0, 2\pi] \times \{0\}$ von Q . Durch jeden Punkt $r \in R$ verläuft genau eine Grundcharakteristik \vec{k} , für die also $\vec{k}(t_0) = r$ für ein t_0 gilt. Bestimmen Sie diejenigen r , bei denen die Charakteristik nach Q hineinläuft, also bei denen $\vec{k}(t_0 + h) \in Q$ für kleine $h > 0$ gilt.

Aufgabe 30

Lösen Sie das Problem

$$\partial_t u(x, t) + tu(x, t) \partial_x u(x, t) = u(x, t), \quad u(x, 0) = -x$$

und skizzieren Sie einige Charakteristiken.

Hinweis Übungsklausur HM III:

Am Samstag den 30.01. findet eine Übungsklausur statt (11-13 Uhr). Zur Teilnahme an der Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.

Studierende der Diplom- oder Lehramtsstudiengänge Physik oder Chemie, die einen **Übungsschein** benötigen, teilen dies bitte unserer Sekretärin Frau Blach per E-Mail (gertraud.blach@kit.edu) mit.

Weitere Details zur Übungsklausur werden in Kürze auf der Homepage bekanntgegeben.