KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann

WS 2009/2010
21.1.2010

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 31

a) Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi)$. Man zeige, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat:

$$\Delta u(x,y) = \partial_r^2 v(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v(r,\varphi).$$

b) Sei $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $u(\vec{x}) := g(\|\vec{x}\|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Man zeige

$$\Delta u(\vec{x}) = g''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} g'(\|\vec{x}\|).$$

Aufgabe 32

Für $n = 2, 3$ sei $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Bestimmen Sie eine Greensche Funktion für $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.
Hinweis: Spiegeln Sie ein gegebenes $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ an der Ebene bzw. Gerade $\partial\Omega = \{x_n = 0\}$, d.h. betrachten Sie $\vec{y}^* = (y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n)$.

Aufgabe 33

Sei $u \in C^2(B(\vec{x}, r))$, wobei $B(\vec{x}, r)$ die Kugel mit Radis $r > 0$ um einen (festen) Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ bezeichne. Zeigen Sie, dass dann

$$(\Delta u)(\vec{x}) = \frac{15}{2\pi} \lim_{h\to 0} \iiint_{B(0,1)} \frac{u(\vec{x} + h\vec{y}) - u(\vec{x})}{h^2} d\tau(\vec{y})$$

gilt.
Hinweis: Taylor-Entwicklung.

Aufgabe 34

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass u lokal der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

b) Sei $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$. Zeigen Sie, dass u harmonisch in Ω ist und bestimmen Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ so, dass $u = \operatorname{Re} f$ gilt.

c) Sei $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x,y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$. Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil a) in diesem Fall tatsächlich nur lokal gilt, d.h. dass u harmonisch in Ω ist, es aber keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $u = \operatorname{Re} f$ gibt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass f dann Stammfunktion von „$1/z$“ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wäre, was bekanntlich (HM II) unmöglich ist.