KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2009/2010
Institut für Analysis 4.2.2010
HDoz. Dr. Peer Kunstmann

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 35

Führen Sie einen Separationsansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ für das folgende Problem durch:

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi,\pi)$$

$$u(t,\pi) = u(t,-\pi),\ \partial_x u(t,\pi) = \partial_x u(t,-\pi) \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x) \text{ für } x \in [-\pi,\pi],$$

wobei $f, g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben sind (Wellengleichung mit periodischen Randbedingungen).

Aufgabe 36

a) Zeigen Sie, daß für alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\delta_{km}.$$

b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$. Definiere die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(m\pi x).$$

Zeigen Sie, daß dann $a_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 37

Definiere $f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } 0 \le x < 1/2 \\ 1-x & \text{falls } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$. Lösen Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) = \partial_{xx}u(t,x) \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,1),\\ &u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \text{für } t > 0,\\ &u(0,x) = f(x) \quad \text{für } x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Hinweis: Aufgabe 36.

— bitte wenden —

Aufgabe 38

Bestimmen Sie für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) \quad \text{in } (0,\infty) \times (0,1), \\ &\partial_x u(t,0) = 0 = \partial_x u(t,1) \quad \text{für } t > 0 \end{aligned}$$

alle separierte-Variablen-Lösungen, also Lösungen von der Gestalt $u(t,x) = g(t)\varphi(x)$.

Aufgabe 39

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, daß die beschränkte Lösung von

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) \quad \text{für } t > 0, x \in (0,\infty), \\ &u(t,0) = 0 \quad \text{für } t > 0, \\ &u(0,x) = f(x) \quad \text{für } x \in [0,\infty) \end{aligned}$$

gegeben ist durch

$$u(t,x) = \int_0^\infty K(t,x,y) f(y)\, dy$$

mit $K(t,x,y) := G(t,x-y) - G(t,x+y)$ für alle $t > 0, x, y \in \mathbb{R}$, wobei G den Wärmeleitungskern auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Hinweis: Setzen Sie f zu einer ungeraden Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort und lösen Sie das Anfangswertproblem für das erweiterte f.