KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Kunstmann

WS 2009/2010
30.01.2010

Übungsklausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden homogenen Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Lösung $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ des obigen Systems mit

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Riccatischen Differentialgleichung.

$$y'(x) = (1-x)y^2(x) + (2x-1)y(x) - x.$$

Hinweis: Es gibt eine konstante Lösung. Das genaue Existenzintervall muss nicht angegeben werden.

b) Bestimmen Sie mittels eines integrierenden Faktors die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung in impliziter Form:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0 \quad \text{in } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0\}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Lösen Sie für $x \in (-1,1)$ das Anfangswertproblem

$$y'' - 2y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n+3)}{2n+1} x^{2n+1}, \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y > 0\}$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x\partial_x u + y\partial_y u = \frac{y}{x}$$

in D und bestimmen Sie die Lösung $u = u(x, y)$ dieser Differentialgleichung, die der Bedingung

$$u(\xi, \xi^2) = \xi \text{ für alle } \xi > 0$$

genügt. Wie sehen die Grundcharakteristiken aus?
Skizzieren Sie in der (x, y)-Ebene die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte vorgegeben sind, sowie einige Grundcharakteristiken.
Überprüfen Sie, ob Ihre Berechnung tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung geliefert hat.
Auf welcher Teilmenge von D ist die von Ihnen berechnete Lösung erklärt?