

Inhaltsverzeichnis HM I-III

Höhere Mathematik I

1 Logische Grundlagen

- 1.1 Aussagen
- 1.2 Verknüpfung von Aussagen
- 1.3 Regeln
- 1.4 Quantoren

2 Mengen

- 2.1 Der Begriff der Menge
- 2.2 Beziehungen zwischen Mengen
- 2.3 Operationen mit Mengen
- 2.4 Die leere Menge
- 2.5 Die Potenzmenge
- 2.6 Das kartesische Produkt

3 Funktionen

- 3.1 Zum Begriff der Funktion
- 3.2 Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)
- 3.3 Komposition
- 3.4 Die Umkehrabbildung
- 3.5 Satz (zur Umkehrfunktion)
- 3.6 Satz ("Hemd-Jacken-Regel")

4 Die reellen Zahlen

- 4.1 Körperaxiome
- 4.2 Anordnungsaxiome
- 4.3 Der Betrag
- 4.4 Supremum und Infimum
- 4.5 Vollständigkeitsaxiom
- 4.6 Satz (beschränkte Mengen)
- 4.7 Natürliche Zahlen
- 4.8 Vollständige Induktion
- 4.9 Ganze und rationale Zahlen
- 4.10 Binomialkoeffizienten
- 4.11 Potenzen
- 4.12 Wurzeln

5 Die komplexen Zahlen

- 5.1 Konstruktion
- 5.2 Konjugation und Betrag
- 5.3 Zur anschaulichen Vorstellung
- 5.4 Polynome

6 Folgen und Konvergenz

- 6.1 Definition** (Folge)
- 6.2 Konvergenz
- 6.3 Grenzwertsätze
- 6.4 Monotone Folgen
- 6.5 Beispiele
- 6.6 Teilfolgen
- 6.7 Rechnen mit ∞
- 6.8 Limes superior und Limes inferior

7 Reihen

- 7.1 Definition (Reihen und Konvergenz)
- 7.2 Satz (konvergente Reihen)
- 7.3 Absolute Konvergenz
- 7.4 Leibnizkriterium für alternierende Reihen
- 7.5 Majoranten- und Minorantenkriterium
- 7.6 Wurzelkriterium

- 7.7 Quotientenkriterium
- 7.8 Die Exponentialreihe
- 7.9 Umordnungen
- 7.10 Das Cauchyprodukt
- 7.11 Die Exponentialfunktion
- 7.12 Sinus und Cosinus
- 7.13 Potenzreihen
- 7.14 Der Konvergenzradius
- 7.15 Satz (Konvergenzradius über Quotienten)
- 8 Stetigkeit**
- 8.1 Definition (Stetigkeit)
- 8.2 Beispiele
- 8.3 Satz (Summe, Produkt, Quotient)
- 8.4 Definition (Grenzwerte bei Funktionen)
- 8.5 Satz (ε - δ -Kriterium)
- 8.6 Satz (Komposition stetiger Funktionen)
- 8.7 Satz (Stetigkeit von Potenzreihen)
- 8.8 Zwischenwertsatz (ZWS)
- 8.9 Einseitige Grenzwerte
- 8.10 Monotone Funktionen und Stetigkeit
- 8.11 Der Logarithmus
- 8.12 Die allgemeine Potenz
- 8.13 Abgeschlossene Mengen
- 8.14 Satz (Annahme von Maximum und Minimum)
- 9 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen**
- 9.1 Die Zahl π
- 9.2 Eigenschaften
- 9.3 Monotonie für \sin und \cos
- 9.4 Arcussinus und Arcuscosinus
- 9.5 Der Tangens
- 9.6 Anwendung: Polarkoordinaten
- 9.7 Hyperbelfunktionen
- 9.8 Areafunktionen
- 9.9 Weitere Funktionen
- 10 Integration**
- 10.1 Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral
- 10.2 Definition (integrierbar)
- 10.3 Satz (integrierbare Funktionen)
- 10.4 Satz (ε -Kriterium für Zerlegungen)
- 10.5 Beispiel ($f(x) = x^m$)
- 10.6 Die Summen m -ter Potenzen
- 10.7 Satz (monotone Funktionen)
- 10.8 Satz (stetige Funktionen)
- 10.9 Satz (zur Berechnung von Integralen)
- 10.10 Satz (Approximation)
- 10.11 Anwendung (Integration von Potenzreihen)
- 10.12 Riemann-Summen
- 10.13 Satz (Produkt, Dreiecksungleichung)
- 10.14 Satz (Stetigkeit des unbestimmten Integrals)
- 11 Differentialrechnung**
- 11.1 Differenzierbarkeit
- 11.2 Ableitungsregeln
- 11.3 Kettenregel
- 11.4 Satz über die Umkehrfunktion
- 11.5 Lokale Extremstellen
- 11.6 Satz (Verschwinden der Ableitung)

- 11.7 Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)
- 11.8 Folgerungen
- 11.9 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- 11.10 Stammfunktionen
- 11.11 Partielle Integration
- 11.12 Integration durch Substitution
- 11.13 Das Newton-Verfahren
- 11.14 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

12 Uneigentliche Integrale

- 12.1 Konvergenz uneigentlicher Integrale
- 12.2 Cauchy Kriterium
- 12.3 Absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale
- 12.4 Satz (Majoranten-, Minorantenkriterium)

13 Fortsetzung der Differentialrechnung

- 13.1 Satz (stückweise differenzierbare Funktionen)
- 13.2 Höhere Ableitungen
- 13.3 Ableitung von Potenzreihen
- 13.4 Satz von Taylor
- 13.5 Lokale Extrema
- 13.6 Identitätssatz für Potenzreihen
- 13.7 Zur Exponentialfunktion

14 Grundzüge der linearen Algebra

- 14.1 Verknüpfungen in \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n
- 14.2 Vektorraumaxiome
- 14.3 Ein wichtiges Beispiel (Vektorräume von Funktionen)
- 14.4 Untervektorräume
- 14.5 Der lineare Aufspann
- 14.6 Lineare Unabhängigkeit
- 14.7 Zeilenumformungen
- 14.8 Zeilennormalform
- 14.9 Basen und Dimension
- 14.9 Lineare Gleichungssysteme
- 14.10 Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes
- 14.11 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems
- 14.12 Lösungsverfahren
- 14.13 Der Rang einer Matrix
- 14.14 Dimensionsformel
- 14.15 Lineare Abbildungen
- 14.16 Lineare Abbildungen als Matrizen
- 14.17 Das Produkt von Matrizen
- 14.18 Invertierbare Matrizen
- 14.19 Skalarprodukt und Norm in \mathbb{C}^n
- 14.20 Orthogonalität
- 14.21 Das Gram-Schmidt-Verfahren
- 14.22 Transponierte und adjungierte Matrizen

Ergänzungen zur HM I für die Fachrichtung Physik

E1 Relationen und Beweistechniken

- E1.1 Definition (Relation)
- E1.2 Eigenschaften von Relationen
- E1.3 Operationen mit Relationen
- E1.4 Beweis durch Kontraposition
- E1.5 Beweis durch Widerspruch
- E1.6 Äquivalenzrelationen

E2 Gruppen und Körper

- E2.1 Definition (Gruppe)

E2.2 Beispiele
 E2.3 Definition (Gruppenhomomorphismus)
 E2.4 Definition (allgemeine Körper)

E3 Polynome
 E3.1 Definition ($\mathbb{K}[X]$)
 E3.2 Definition (kommutativer Ring mit Eins)
 E3.3 Nullteilerfreiheit
 E3.4 Polynomdivision
 E3.5 Bemerkung (Quotientenkörper)

E4 Anwendungen der Bernoullischen Ungleichung
 E4.1 Die Eulersche Zahl e
 E4.2 Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

E5 Ergänzungen zu Folgen
 E5.1 Definition (Intervallschachtelung)
 E5.2 Satz (über Intervallschachtelung)
 E5.3 Bemerkung
 E5.4 Definition (Cauchyfolge)
 E5.5 Bemerkung (Cauchyfolgen sind beschränkt)
 E5.6 Satz (Konvergenz von Cauchyfolgen)
 E5.7 Definition (unendlich, abzählbar)

E6 Ergänzungen zu Reihen
 E6.1 Cauchy Kriterium für Reihen
 E6.2 Satz (Konvergenz absolut konvergenter Reihen)
 E6.3 Bemerkung
 E6.4 Satz (Umordnungen)
 E6.5 Bemerkung
 E6.6 Satz (\mathbb{R} ist überabzählbar)

E7 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz
 E7.1 Approximation von Potenzreihen
 E7.2 Definition (Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen)
 E7.3 Satz (gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen)
 E7.4 Satz (Kriterien für gleichmäßige Konvergenz)
 E7.5 Satz (Beschränktheit und Stetigkeit)
 E7.6 Folgerung
 E7.7 Beispiele
 E7.8 Bemerkung (zu komplexen Potenzreihen)

E8 Ergänzungen zur Stetigkeit
 E8.1 Beweis des Zwischenwertsatzes
 E8.2 Beweis des Satzes in 8.10
 E8.3 Beweis von Satz 8.14
 E8.4 Kompaktheit
 E8.5 Satz (stetige Funktionen auf kompakten Mengen)
 E8.6 Satz (Abstand kompakter Mengen)
 E8.7 Der Raum der beschränkten Funktionen
 E8.8 Definition (Supremumsnorm)
 E8.9 Definition (Konvergenz in $B(M)$)
 E8.10 Satz (Vollständigkeit von $B(M)$)
 E8.11 Satz ($C(K)$)
 E8.12 Definition (gleichmäßig stetig)
 E8.13 Satz (zur gleichmäßigen Stetigkeit)
 E8.14 Der Abschluss einer Menge
 E8.15 Satz (Fortsetzung gleichmäßig stetiger Funktionen)

E9 Ergänzungen zur Integration
 E9.1 Satz (endliche Unstetigkeitsmenge)
 E9.2 Vertauschen von Limes und Integral
 E9.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

E10 Bemerkungen zu Differentialgleichungen

- E10.1 Schreibweisen
- E10.2 Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung
- E10.3 Definition (Lösungen)
- E10.4 Einfache Beispiele
- E10.5 Die lineare Differentialgleichung
- E10.6 Trennung der Variablen
- E10.7 Die lineare zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- E10.8 Allgemeine erster Ordnung
- E10.9 Satz (Vertauschung von Limes und Ableitung)

E11 Ergänzungen zu Vektorräumen

- E11.1 Satz (Eindeutigkeit der Länge einer Basis)
- E11.2 Die homogene lineare zweiter Ordnung
- E11.3 Definition (Norm)
- E11.4 Definition (Prä-Hilbertraum)
- E11.5 Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
- E11.6 Definition (Hilbertraum)
- E11.7 Der Hilbertraum l^2
- E11.8 Der Projektionssatz
- E11.9 Lineare Operatoren
- E11.10 Selbstadjungierte Operatoren

Höhere Mathematik II

15 Determinanten und Kreuzprodukt

- 15.1 Definierende Eigenschaften der Determinante
- 15.2 Folgerungen
- 15.3 Der Fall $n = 2$
- 15.4 Der Fall $n = 3$
- 15.5 Der allgemeine Fall
- 15.6 Das Signum einer Permutation
- 15.7 Die Leibnizformel für Determinanten
- 15.8 Determinantenentwicklungssatz
- 15.9 Determinantenmultiplikationssatz
- 15.10 Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme
- 15.11 Eine Formel für die inverse Matrix
- 15.12 Orientierung
- 15.13 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) im \mathbb{R}^3
- 15.14 Das Spatprodukt

16 Eigenwerte, Diagonalisierung von Matrizen und Hauptachsentransformation

- 16.1 Eigenwerte und Eigenvektoren
- 16.2 Bemerkungen (geometrische Vielfachheit)
- 16.3 Charakteristisches Polynom und algebraische Vielfachheit
- 16.4 Ähnliche Matrizen
- 16.5 Die Spur einer Matrix
- 16.6 Diagonalisierung von Matrizen
- 16.7 Orthogonale und unitäre Matrizen
- 16.8 Symmetrische und hermitesche Matrizen
- 16.9 Satz (Jordan-Normalform)
- 16.10 Definitheit reeller symmetrischer Matrizen
- 16.11 Allgemeine quadratische Formen
- 16.12 Quadriken und Hauptachsentransformation

17 Differentialgleichungen

- 17.1 Beispiel
- 17.2 Differentialgleichungen n -ter Ordnung
- 17.3 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen
- 17.4 Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

- 17.5 Lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung
- 17.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- 17.7 Variation der Konstanten für Gleichungen n -ter Ordnung
- 17.8 Ansätze für spezielle rechte Seiten
- 17.9 Gronwall-Lemma
- 17.10 Eindeutigkeit der Lösungen linearer Differentialgleichungen n -ter Ordnung (Bonus)
- 17.11 Inhomogenitäten mit Sprüngen

18 Fourierreihen

- 18.1 T -periodische Funktionen
- 18.2 Integration und Differentiation komplexwertiger Funktionen
- 18.3 Trigonometrische Polynome
- 18.4 Fourierkoeffizienten einer Funktion
- 18.5 Absolut summierbare Fourierkoeffizienten
- 18.6 "Reelle" Fourierkoeffizienten
- 18.7 Stückweise stetige und stückweise glatte Funktionen
- 18.8 Darstellungssatz für 2π -periodische Funktionen
- 18.9 Skalarprodukt und Orthogonalität

19 Mehrdimensionale Differentialrechnung

- 19.1 Konvergenz von Folgen in \mathbb{R}^n
- 19.2 Offene und abgeschlossene Mengen in \mathbb{R}^n
- 19.3 Stetigkeit von Funktionen
- 19.4 Differenzierbarkeit von Funktionen $\mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^n$
- 19.5 Raumkurven
- 19.6 Bogenlänge von Raumkurven
- 19.7 Richtungsableitungen
- 19.8 Partielle Ableitungen
- 19.9 Differenzierbarkeit
- 19.10 Kriterium für Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit
- 19.11 Ableitungen höherer Ordnung
- 19.12 Der Gradient
- 19.13 Kettenregel
- 19.14 Der Umkehrsatz
- 19.15 Der Satz über implizit definierte Funktionen
- 19.16 Der Satz von Taylor
- 19.17 Lokale Extremstellen
- 19.18 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen
- 19.19 Multiplikatorenregel von Lagrange
- 19.20 Rotation, Divergenz, Laplace
- 19.21 Rechenregeln
- 19.22 Potentialfelder

20 Kurvenintegrale und Integralsätze im \mathbb{R}^2

- 20.1 Kurvenintegrale von Skalarfeldern
- 20.2 Kurvenintegrale von Vektorfeldern
- 20.3 Gebiete und einfach zusammenhängende Mengen
- 20.4 Kurvenintegrale und Potentialfelder
- 20.5 Integration über Teilmengen im \mathbb{R}^2
- 20.6 Gaußscher Integralsatz im \mathbb{R}^2
- 20.7 Stokesscher Integralsatz im \mathbb{R}^2
- 20.8 Divergenzsatz im \mathbb{R}^2
- 20.9 Greensche Formeln
- 20.10 Bemerkung (Abschwächung der Voraussetzungen)

21 Oberflächenintegrale und Integralsätze im \mathbb{R}^3

- 21.1 Integrale über Teilmengen von \mathbb{R}^n
- 21.2 Integration über projizierbare Teilmengen von \mathbb{R}^3
- 21.3 Transformationsformel
- 21.4 Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2

- 21.5 Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3
- 21.6 Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3
- 21.7 Flächendarstellungen im \mathbb{R}^3
- 21.8 Oberflächenintegral
- 21.9 Der Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3
- 21.10 Der Divergenzsatz im \mathbb{R}^3

22 Parameterintegrale

- 22.1 Stetige Abhängigkeit von einem Parameter
- 22.2 Differenzierbare Abhängigkeit von einem Parameter
- 22.3 Bemerkung
- 22.4 Kontinuumsmechanik
- 22.5 Das Transporttheorem
- 22.6 Die Ableitung von \det
- 22.7 Fortsetzung von 22.5
- 22.8 Eine weitere Anwendung: Impulserhaltung

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

23 Laplacetransformation

- 23.1 Definition (Laplacetransformation)
- 23.2 Beispiele
- 23.3 Definition (exponentielle Ordnung)
- 23.4 Satz (Existenz und Abschätzung von $\mathcal{L}\{f\}$)
- 23.5 Rechenregeln
- 23.6 Beispiele
- 23.7 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung komplexwertig
- 23.8 Die Faltung
- 23.9 Die Faltungsregel
- 23.10 Beispiele
- 23.11 Komplexe Partialbruchzerlegung
- 23.12 Differentiation für stetige stückweise differenzierbare Funktionen
- 23.13 Folgerung (höhere Ableitungen)
- 23.14 Anwendung
- 23.15 Sprungantwort eines Systems
- 23.16 Anfangswertsatz
- 23.17 Endwertsatz
- 23.18 Korrespondenzen

24 Komplexe Analysis

- 24.1 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie
- 24.2 Rechenregeln
- 24.3 Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen
- 24.4 Satz von der Gebietstreue, Maximumsprinzip
- 24.5 Potenzreihen
- 24.6 Holomorphie von Laplacetransformierten
- 24.7 Kurvenintegrale
- 24.8 Cauchyscher Integralsatz
- 24.9 Cauchysche Integralformel
- 24.10 Folgerungen
- 24.11 Laurententwicklung
- 24.12 Residuensatz
- 24.13 Berechnung von Residuen
- 24.14 Die komplexe Umkehrformel
- 24.15 Spezialfall
- 24.16 Jordansches Lemma
- 24.17 Logarithmus und allgemeine Potenz
- 24.18 Konforme Abbildungen

25 Laplacetransformation von Distributionen

- 25.1 Die Grundidee für Distributionen
- 25.2 Ableitung von Distributionen
- 25.3 Ableitung von stückweise glatten Funktionen
- 25.4 Laplacetransformierbare Distributionen
- 25.5 Laplacetransformation von Distributionen
- 25.6 Ableitungsregel
- 25.7 Impulsantwort differentieller Systeme
 - BONUS – Nicht in der Vorlesung gebracht
- 25.B1 Translationen (Verschiebungen) von Distributionen
- 25.B2 Faltung von Distributionen
- 25.B3 Konvergenz von Distributionen
- 25.B4 Anwendung: Lineare zeitinvariante Übertragungsglieder
 - Ende des BONUS

26 Fouriertransformation und zweiseitige Laplacetransformation

- 26.1 Zweiseitige Laplacetransformation
- 26.2 Fouriertransformation
- 26.3 Rechenregeln für die Fouriertransformation
- 26.4 Beispiel
- 26.5 Riemann-Lebesgue-Lemma
- 26.6 Faltung und Fouriertransformation
- 26.7 Dancing-Hat-Lemma
- 26.8 Fourierinversionsformel
- 26.9 Satz von Plancherel

Höhere Mathematik III

Gewöhnliche Differentialgleichungen

27 Elementare Methoden für Differentialgleichungen

- 27.1 Wiederholung: die lineare Differentialgleichung
- 27.2 Bernoulli-Differentialgleichung
- 27.3 Riccati-Differentialgleichung
- 27.4 Exakte Differentialgleichungen
- 27.5 Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)
- 27.6 Implizite Differentialgleichungen
- 27.7 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung
- 27.8 Die Eulersche Differentialgleichung
- 27.9 Potenzreihenansatz
- 27.10 Abgewandelter Potenzreihenansatz

28 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

- 28.1 Das Problem
- 28.2 Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf
- 28.3 Bemerkungen zum Beweis
- 28.4 Banachscher Fixpunktsatz
- 28.5 Existenzsatz von Peano

29 Lineare Differentialgleichungssysteme

- 29.1 Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten
- 29.2 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten
- 29.3 Fundamentalsysteme für nicht-diagonalisierbare Matrizen
- 29.4 Asymptotisches Verhalten
- 29.5 Die Matrixexponentialfunktion

Partielle Differentialgleichungen

30 Transportgleichungen und Charakteristiken

- 30.1 Lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten
- 30.2 Lineare Transportgleichung im \mathbb{R}^n
- 30.3 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung
- 30.4 Anfangsbedingungen für quasilineare Gleichungen

31 Die Potentialgleichung

- 31.1 Harmonische Funktionen
- 31.2 Mittelwerteigenschaft
- 31.3 Maximumsprinzip
- 31.4 Grundlösung der Laplace-Gleichung
- 31.5 Greensche Darstellungsformel
- 31.6 Greensche Funktion
- 31.7 Dirichletproblem auf der Kugel
- 31.8 Die Poissongleichung
- 32 Die Diffusionsgleichung**
- 32.1 Motivation (Wärmeleitungsgleichung)
- 32.2 Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung
- 32.3 Anfangswerte für $t = 0$
- 32.4 Maximumsprinzip
- 32.5 Separation der Variablen
- 33 Die Wellengleichung**
- 33.1 Die eindimensionale Wellengleichung
- 33.2 Diskussion
- 33.3 Die dreidimensionale Wellengleichung
- 33.4 Die zweidimensionale Wellengleichung