Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt, WS 2009/2010

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Der Diffusionsprozess wird beschrieben durch

$$\Delta S = k \cdot F \cdot (C_1 - c(t)) \cdot \Delta t,$$

wobei ΔS den Salzmengenzuwachs in der Zeit $\Delta t, k$ die Proportionalitätskonstante, F die Zelloberfläche, C_1 die Salzkonzentration im Schwimmbecken und $c(t)$ die Salzkonzentration in der Zelle zum Zeitpunkt t angibt. Außerdem gilt für Salzkonzentration $c(t) = \frac{S(t)}{V}$, also auch $\Delta c = \frac{\Delta S}{V}$. Damit erhalten wir

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{k \cdot F}{V} \cdot (C_1 - c(t)),$$

und der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ führt dann zur gesuchten Differentialgleichung für die Salzkonzentration in der Zelle:

$$c'(t) = \frac{kF}{V} \cdot (C_1 - c(t)),$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung und wir entnehmen dem Aufgabentext noch die Anfangsbedingung $c(0) = C_2$. Mit der Formel aus Kapitel 27.1 des Vorlesungskripts erhalten wir als Konzentrationsverlauf in der Zelle:

$c(t) = C_2 e^{-\frac{kF}{V}t} + e^{-\frac{kF}{V}t} \int_0^t e^{\frac{kF}{V}\xi} \frac{kFC_1}{V} d\xi = C_2 e^{-\frac{kF}{V}t} + e^{-\frac{kF}{V}t} C_1 [e^{\frac{kF}{V}\xi}]_{\xi=0}^{\xi=t} = C_2 e^{-\frac{kF}{V}t} + C_1 - C_1 e^{-\frac{kF}{V}t} = (C_2 - C_1)e^{-\frac{kF}{V}t} + C_1.$

Aufgabe 2 Bei allen drei Aufgabenteilen handelt es sich um Bernoullische Differentialgleichungen. Außerdem erfüllt $y \equiv 0$ keine der Anfangsbedingungen und ist damit keine Lösung. Da die entsprechenden Exponenten der Bernoulli-Gleichungen ganzzahlig sind, genügt es daher nach nicht verschwindenden Lösungen zu suchen.

a) $y' = 3y + e^{-x}y^2\,, \quad y(0) = 1$. Hier ist $\alpha = 2$ und es gilt $y' - 3y - e^{-x}y^2 = 0$.
Wir multiplizieren mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ $(= -\frac{1}{y^2})$ und erhalten:

$$-\frac{y'}{y^2} + 3\frac{1}{y} + e^{-x} = 0.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y})$. Es gilt dann $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$ und $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Wir erhalten also:

$$z' + 3z + e^{-x} = 0\,, \quad z(0) = 1.$$

Gemäß 27.1 folgt (wegen $\int_0^x -3dt = -3x$) $z(x) = 1e^{-3x} + e^{-3x}\int_0^x e^{3t}(-e^{-t})dt = e^{-3x} + e^{-3x}[-e^{2t}/2]_{t=0}^{t=x} = \frac{3}{2}e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}(3e^{-2x} - 1)$.
Nun ermitteln wir die Nullstellen von z. Aus $z(c_0) = 0$ folgt $3e^{-2c_0} - 1 = 0$, also ist $c_0 = \frac{\ln 3}{2} > 0$ die einzige Nullstelle von z ist. Also verschwindet z auf $(-\infty, c_0)$ nicht und wir erhalten

$$y_0(x) := 1/z(x) = \frac{2e^x}{3e^{-2x} - 1}\,, \quad x \in (-\infty, c_0)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

b) $y' + y^2 - xy - y/x = 0\,, \quad y(1) = 1$. Hier ist $\alpha = 2$ und es gilt $y' - (x + 1/x)y + y^2 = 0$.
Wir suchen Lösungen in einer Umgebung von 1 innerhalb von $(0, \infty)$ (wegen des Terms $1/x$).
Wir multiplizieren mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ $(= -\frac{1}{y^2})$ und erhalten:

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{(x + 1/x)}{y} - 1 = 0.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y})$. Es gilt dann $z(1) = \frac{1}{y(1)} = 1$ und $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Wir erhalten also:

$$z' + (x + 1/x)z - 1 = 0\,, \quad z(1) = 1.$$

Gemäß 27.1 folgt (wegen $\int_1^x -(t - 1/t)dt = -x^2/2 - \ln x + 1/2$):
$z(x) = 1e^{-x^2/2-\ln x+1/2} + e^{-x^2/2-\ln x+1/2} \int_1^x e^{t^2/2+\ln t-1/2}dt =$
$\sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} + \sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} \cdot 1/\sqrt{e}[e^{t^2/2}]_{t=1}^{t=x} = \sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} + x^{-1} - \sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} = x^{-1}$.
Auf $(0, \infty)$ verschwindet z offensichtlich nicht und wir erhalten

$$y_0(x) := 1/z(x) = x\,, \quad x \in (0, \infty)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

c) $y' + xy + \frac{1}{2}(xy)^3 = 0\,, \quad y(0) = \sqrt{2}$. Hier ist $\alpha = 3$.
Wir multiplizieren mit $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ $(= -2\frac{1}{y^3})$ und erhalten:

$$-\frac{2y'}{y^3} - \frac{2x}{y^2} - x^3 = 0.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y^2})$. Es gilt dann $z(0) = \frac{1}{(y(0))^2} = 1/2$ und $z' = -2\frac{y'}{y^3}$. Wir erhalten also:

$$z' - 2xz - x^3 = 0\,, \quad z(0) = 1/2.$$

Gemäß 27.1 folgt (wegen $\int_0^x 2tdt = x^2$) $z(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}(t^3)dt = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{x^2}[-\frac{(t^2+1)e^{-t^2}}{2}]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{t^2+1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2} = e^{x^2} - \frac{x^2+1}{2}$.
(Die dabei verwendete Stammfunktion kann man etwa durch Produktintegration (mit $u = x^2$ und $v' = xe^{-x^2}$) gewinnen: $\int t^3e^{-t^2}\,dt = t^2 \cdot \frac{-e^{-t^2}}{2} - \int 2t \cdot \frac{-e^{-t^2}}{2}\,dt = -\frac{t^2e^{-t^2}}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2} = -\frac{(t^2+1)e^{-t^2}}{2}$.)
Wir zeigen nun, dass z keine Nullstelle hat: Es gilt $z'(x) = 2xe^{x^2} - x = x(2e^{x^2} - 1)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2e^{x^2} \geq 2e^0 = 2 > 1$. Daher gilt $z'(x) < 0$ für $x < 0$, $z'(x) > 0$ für $x > 0$ und $z'(0) = 0$. Das bedeutet, dass die Funktion z auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fällt, auf $(0, \infty)$ streng monoton steigt und bei 0 ihr globales Minumum $z(0) = 1/2 > 0$ annimmt. Also hat z keine Nullstelle.
Aus $y^2 = 1/z$ folgt $y = 1/\sqrt{z}$ oder $y = -1/\sqrt{z}$. Wegen $y(0) = \sqrt{2} > 0$ ist der zweite Fall keine Lösung und wir erhalten

$$y_0(x) := \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)}}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 3 Bei beiden Aufgabenteilen handelt es sich um Bernoullische Differentialgleichungen.

a) $y' = -\frac{y}{x} + x^2y^2$. Hier ist $\alpha = 2$ und es gilt $y' + \frac{y}{x} - x^2y^2 = 0$.
Wir suchen Lösungen auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ (wegen des Terms $\frac{1}{x}$) und wir nehmen zunächst an, daß die Lösungen dort nicht verschwinden. Wir multiplizieren mit $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ $(= -\frac{1}{y^2})$ und erhalten:

$$-\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} + x^2 = 0.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y})$. Es gilt dann $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Wir erhalten also:

$$z' - \frac{1}{x}z + x^2 = 0.$$

Gemäß 27.1 erhalten wir die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $z' = \frac{z}{x}$: $z_h(x) = \tilde{c}e^{\int \frac{dx}{x}} = \tilde{c}e^{\ln|x|} = \tilde{c}|x|$ für jedes $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Schränkt man sich auf eines der beiden Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ ein, läßt sich z_h offensichtlich auch als $z_h(x) = cx$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ beschreiben. Mittels der Variation der Konstanten erhalten wir die partikuläre Lösung $z_p(x) = -\frac{1}{2}x^3$ der inhomogenen Gleichung. Damit lautet die allgemeine Lösung von $z' - \frac{1}{x}z + x^2 = 0$: $z_c(x) = z_h(x) + z_p(x) = cx - \frac{x^3}{2}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Für

$c \leq 0$ hat z_c bis auf 0 keine Nullstellen, für $c > 0$ sind 0, $\sqrt{2c}$ und $-\sqrt{2c}$ sämtliche Nullstellen von z_c. Außerhalb dieser Nullstellen erhalten wir durch Rücksubstition also

$$y_c = 1/z_c = \frac{2}{2cx - x^3}.$$

Da der Exponent α ganzzahlig ist, sind alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung folglich gegeben durch $y \equiv 0$ und y_c mit $c \in \mathbb{R}$, wobei y_c für $c \leq 0$ auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ und für $c > 0$ auf $(-\infty, -\sqrt{2c})$, $(-\sqrt{2c}, 0)$, $(0, \sqrt{2c})$ und $(\sqrt{2c}, \infty)$ der Differentialgleichung genügt.

b) $y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$. Hier ist $\alpha = 4$.
Wir suchen Lösungen auf $(-\infty, -1)$ und $(-1, \infty)$ (wegen des Terms $\frac{1}{1+x}$) und wir nehmen zunächst an, daß die Lösungen dort nicht verschwinden. Wir multiplizieren mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ $(= -3\frac{1}{y^4})$ und erhalten:

$$-3\frac{y'}{y4} - \frac{3}{(1+x)y^3} - 3(1+x) = 0$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y^3})$. Es gilt dann $z' = -3\frac{y'}{y^4}$. Wir erhalten also:

$$z' - \frac{3}{1+x}z - 3(1+x) = 0.$$

Gemäß 27.1 erhalten wir die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $z' = 3\frac{1}{1+x}z$: $z_h(x) = \tilde{c}e^{\int 3\frac{dx}{1+x}} = \tilde{c}e^{3\ln|1+x|} = \tilde{c}|1+x|^3$ für jedes $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Schränkt man sich auf eines der beiden Intervalle $(-\infty, -1)$ und $(-1, \infty)$ ein, läßt sich z_h offensichtlich auch als $z_h(x) = c(1+x)^3$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ beschreiben. Mittels der Variation der Konstanten erhalten wir die partikuläre Lösung $z_p(x) = \frac{-3}{1+x}$ der inhomogenen Gleichung. Damit lautet die allgemeine Lösung von $z' - \frac{3}{1+x}z - 3(1+x) = 0$: $z_c(x) = z_h(x) + z_p(x) = c(1+x)^3 - 3(1+x)^2$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Um die Gleichung $y^3 = 1/z_c$ nach y aufzulösen, bestimmen wir das Vorzeichen von z_c auf geeigneten Intervallen in Abhängigkeit von c.

Für $c = 0$ hat z_c bis auf -1 keine Nullstellen und auf $(-\infty, -1)$ und $(-1, \infty)$ ist $z_c = -3(1+x)^2$ stets negativ. Wir erhalten in diesem Fall daher $y = -(-z_c)^{-1/3} = -(3(1+x)^2)^{-1/3}$ als Lösung auf $(-\infty, -1)$ und $(-1, \infty)$.

Für $c \neq 0$ hat z_c die Nullstellen -1 und $3/c - 1$ und es gilt $z_c > 0 \iff c(1+x) > 3$. Für $c > 0$ ist z_c also negativ auf $(-\infty, -1)$ und $(-1, -1+3/c)$ und positiv auf $(-1+3/c, \infty)$. Wir erhalten im Fall $c > 0$ daher $y = -(-z_c)^{-1/3} = -(-c(1+x)^3 + 3(1+x)^2)^{-1/3}$ als Lösung auf $(-\infty, -1)$ und $(-1, -1+3/c)$ und $y = (z_c)^{-1/3} = (c(1+x)^3 - 3(1+x)^2)^{-1/3}$ als Lösung auf $(-1+3/c, \infty)$.

Für $c < 0$ ist z_c genau dann positiv, wenn $x < -1 + 3/c$ gilt. Also ist in diesem Fall z_c negativ auf $(-1+3/c, -1)$ und $(-1, \infty)$ und positiv auf $(-\infty, -1+3/c)$. Wir erhalten im Fall $c < 0$ daher $y = -(-z_c)^{-1/3} = -(-c(1+x)^3 + 3(1+x)^2)^{-1/3}$ als Lösung auf $(-1+3/c, -1)$ und $(-1, \infty)$ und $y = (z_c)^{-1/3} = (c(1+x)^3 - 3(1+x)^2)^{-1/3}$ als Lösung auf $(-\infty, -1+3/c)$.

Nimmt man noch $y \equiv 0$ als Lösung hinzu, so sind dadurch alle Lösungen beschrieben (da der Exponent α ganzzahlig ist).

Aufgabe 4 Zunächst bestimmen wir eine spezielle Lösung der Gleichung mit dem gegebenen Ansatz: $\phi(x) = e^{ax}$ liefert

$$\phi' = ae^{ax}\,, \qquad e^{-x}\phi^2 + \phi - e^x = e^{(2a-1)x} + e^{ax} - e^x\,,$$

und für $a = 1$ gilt Gleichheit. Somit ist $\phi(x) = e^x$ eine Lösung der Gleichung.

Die weiteren Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung bekommen wir nun mit dem Ansatz $u = y - \phi = y - e^x$. Dieser liefert für die Funktion u gemäß Vorlesungsskript 27.3 (2) die Gleichung

$$u' + (-1 + 2\phi \cdot (-e^{-x}))u + (-e^{-x})u^2 = 0 \qquad \text{also} \qquad u' - 3u - e^{-x}u^2 = 0\,.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit Exponent $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir mit $(1-\alpha)u^{-\alpha} = -u^{-2}$ multiplizieren und $z = u^{1-\alpha} = u^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{3}{u} + e^{-x} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad z' + 3z + e^{-x} = 0\,.$$

Die homogene Gleichung $z' + 3z = 0$ hat gemäß 27.1 die allgemeine Lösung $z_h(x) = ce^{-3x}$ und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ als spezielle Lösung der inhomogen Gleichung. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z_c(x) = -\tfrac{1}{2}e^{-x} + ce^{-3x} \qquad (c \in \mathbb{R})\,.$$

Nun ermitteln wir die Nullstellen von z_c. Aus $z(\xi) = 0$ folgt $e^{2\xi} = 2c$. Für $c \leq 0$ hat z_c also keine Nullstelle, für $c > 0$ ist $\xi = \ln(2c)/2$ die einzige Nullstelle von z_c.

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir also durch

$$u(x) = \frac{1}{z_c(x)} = \frac{1}{ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}}$$

eine Lösung von $u' - 3u - e^{-x}u^2 = 0$, wobei $x \in \mathbb{R}$ falls $c \leq 0$ und $x \in (-\infty, \ln(2c)/2)$ oder $x \in (\ln(2c)/2, \infty)$ falls $c > 0$ gilt. Zusammen mit $u \equiv 0$ sind dies alle Lösungen von $u' - 3u - e^{-x}u^2 = 0$.

Für die ursprüngliche Gleichung haben wir also die Lösungen

$$\phi(x) = e^x \qquad \text{und} \qquad y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^{-3x} - e^{-x}} \quad (c \in \mathbb{R})\,.$$

auf den entsprechenden Intervallen ($\mathbb{R}$ oder $(-\infty, \ln(2c)/2)$ und $(\ln(2c)/2, \infty)$ je nach Wahl von c).

Aufgabe 5 Es handelt sich um eine Riccatische Differentialgleichung und nach dem Hinweis wählen wir $\phi = c$ als Ansatz für eine spezielle Lösung. Damit folgt $0 = (1-x)c^2 + (2x-1)c - x$, also $x(-c^2 + 2c - 1) + c^2 - c = 0$ und wir sehen, dass $\phi \equiv 1$ eine Lösung ist.

Alle weiteren Lösungen bekommen wir nun mit dem Ansatz $u = y - \phi = y - 1$. Dieser liefert für die Funktion u gemäß Vorlesungsskript 27.3 (2) die Gleichung

$$u' + (-(2x-1) + 2\phi \cdot (-(1-x)))u + (-1-x)u^2 = 0 \qquad \text{also} \qquad u' - u - (1-x)u^2 = 0\,.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit Exponent $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir mit $(1-\alpha)u^{-\alpha} = -u^{-2}$ multiplizieren und $z = u^{1-\alpha} = u^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$z' + z + 1 - x = 0.$$

Die homogene Gleichung $z' + z = 0$ hat gemäß 27.1 die allgemeine Lösung $z_h(x) = ce^{-x}$, und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = x - 2$ als spezielle Lösung der inhomogen Gleichung. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z_c(x) = x - 2 + ce^{-x}.$$

Für u muß also $u(x) = 1/z_c(x) = (x - 2 + ce^{-x})^{-1}$ mit geeigenetem $c \in \mathbb{R}$ gelten und damit folgt $y = u + \phi = 1 + (x - 2 + ce^{-x})^{-1}$, wobei wir einen geeigneten Definitionsbereich angeben, nachdem wir die Konstante bestimmt haben.

Um das Anfangswertproblem zu lösen, muß also $2 = y(1) = 1 + \frac{1}{1-2+ce^{-1}}$ gelten. Daraus folgt $c = 2e$. Damit erhalten wir $y = 1 + \frac{1}{x-2+2e^{1-x}}$ als Lösung auf ganz $\mathbb{R}$, denn der Nenner $u_0(x) := x - 2 + 2e^{1-x}$ hat keine Nullstelle: Dies kann man analog zu Aufgabe 2c einsehen, indem man die Ableitung $u_0'(x) = 1 - 2e^{1-x}$ nach Nullstellen untersucht: Dadurch erhält man $u_0(1 + \ln 2) = \ln 2 > 0$ als globales Minumum der Funktion u_0. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus der Eindeutigkeit der Wahl der Konstante C.