Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt, WS 2009/2010

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 6 **a)** Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ wobei $P(x,y):=2x\sin y$, $Q(x,y)=x^2\cos y$. Offenbar gilt $P,Q\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Damit ist laut Vorlesung (27.4) die Differentialgleichung exakt, falls $P_y=Q_x$ gilt. Das ist hier der Fall, denn $P_y=2x\cos y=Q_x$.

Wir bestimmen nun eine Stammfunktion F der Differentialgleichung. Die Forderung $F_x=P=2x\sin y$ führt auf

$$F(x,y)=x^2\sin y+c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c. Hieraus folgt

$$F_y(x,y)=x^2\cos y+c'(y)\stackrel{!}{=}Q(x,y)=x^2\cos y\,.$$

Somit ist $c'(y)=0$, und wir wählen $c\equiv 0$. Dann gilt als $F(x,y)=x^2\sin y$.

Nach Satz 27.4 1 läßt sich jede Lösung y der Differentialgleichung dann in impliziter Form $F(x,y(x))=C$, also $x^2\sin y(x)=C$, mit $C\in\mathbb{R}$ schreiben.

b) Setzen wir die Anfangsbedingung $y(1)=\frac{9}{4}\pi$ in diese Gleichung ein, so folgt $1^2\sin(\frac{9}{4}\pi)=C$, also $C=\sqrt{2}/2$.

Wir versuchen nun, die Gleichung $F(x,y(x))=C$, also $x^2\sin y=\sqrt{2}/2$ nach y aufzulösen. Die Gleichung $x^2\sin y=\sqrt{2}/2$ kann nur für $x^2\geq\sqrt{2}/2$ erfüllt sein. Es muss also $|x|\geq 1/\sqrt[4]{2}$ gelten. Wegen $x_0=1\in(1/\sqrt[4]{2},\infty)$ beschränken wir uns auf $x\geq 1/\sqrt[4]{2}$. In diesem Fall gilt $\sin(y(x))=\frac{\sqrt{2}}{2x^2}$. Zusammen mit $y(1)=\frac{9}{4}\pi$ erhalten wir die Lösung

$$y(x)=2\pi+\arcsin\Big(\frac{\sqrt{2}}{2x^2}\Big)\qquad\text{für } x\geq 1/\sqrt[4]{2}\,.$$

c) Die Rechnung aus b) zeigt bereits, dass y auf $(1/\sqrt[4]{2},\infty)$ eindeutig bestimmt ist. *Alternativ* können wir aus der Bemerkung in 27.4 der Vorlesung auf Eindeutigkeit in einer kleinen Umgebung schließen, denn es gilt $Q(x_0,y_0)=Q(1,\frac{9}{4}\pi)=\cos(\frac{9}{4}\pi)=\sqrt{2}/2$.

Aufgabe 7 **a)** Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ mit $P(x,y):=2x+4y+2$ und $Q(x,y):=4x+12y+8$. Für die stetig differenzierbaren Funktionen P und Q gilt $P_y(x,y)=4=Q_x(x,y)$, d. h. die Differentialgleichung ist exakt. Wir suchen daher eine Stammfunktion F, also eine Funktion mit $\operatorname{grad}F=(P,Q)$. Aus der Forderung

$$F_x(x,y)\stackrel{!}{=}P(x,y)=2x+4y+2$$

ergibt sich, dass die gesuchte Stammfunktion F eine Darstellung der Form

$$F(x,y)=x^2+4xy+2x+c(y)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c haben muss. Also erhält man

$$F_y(x,y)=4x+c'(y)\stackrel{!}{=}Q(x,y)=4x+12y+8\,,$$

und damit die Gleichung $c'(y)=12y+8$. Diese kann durch $c(y)=6y^2+8y$ erfüllt werden. Eine Stammfunktion der Differentialgleichung ist somit

$$F(x,y)=x^2+4xy+2x+6y^2+8y\,.$$

Nach Satz 27.4 1 läßt sich jede Lösung y der Differentialgleichung dann in impliziter Form $F(x,y(x))=C$, also $x^2+4xy+2x+6y^2+8y=C$, mit $C\in\mathbb{R}$ schreiben.

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ folgt wegen $F(0,-1) = 6 - 8 = -2$, dass man $C = -2$ wählen muss. Folglich ist

$$x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y = -2$$

die implizite Lösung des Anfangswertproblems, und man kann noch explizit auflösen:

$$y(x) = \frac{-(4x+8) - \sqrt{(4x+8)^2 - 24(x^2+2x+2)}}{12} = \frac{-x-2-\sqrt{-x^2/2+x+1}}{3},$$

wobei $x \in (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. Das Vorzeichen vor der Wurzel ergibt sich dabei aus der Anfangsbedingung $y(0) = -1$.

b) Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ mit $P(x,y) := 2x(y + e^{(x^2)})$ und $Q(x,y) := x^2 + 3$. Für die stetig differenzierbaren Funktionen P und Q gilt $P_y(x,y) = 2x = Q_x(x,y)$, d. h. die Differentialgleichung ist exakt. Wir suchen daher eine Stammfunktion F, also eine Funktion mit $\operatorname{grad} F = (P, Q)$. Aus der Forderung

$$F_x(x,y) \stackrel{!}{=} P(x,y) = 2x(y + e^{(x^2)}) = 2xy + 2xe^{(x^2)}$$

ergibt sich, dass die gesuchte Stammfunktion F eine Darstellung der Form

$$F(x,y) = x^2y + e^{(x^2)} + c(y)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c haben muss. Also erhält man

$$F_y(x,y) = x^2 + c'(y) \stackrel{!}{=} Q(x,y) = x^2 + 3\,,$$

und damit die Gleichung $c'(y) = 3$. Diese kann durch $c(y) = 3y$ erfüllt werden. Eine Stammfunktion der Differentialgleichung ist somit

$$F(x,y) = x^2y + e^{(x^2)} + 3y\,.$$

Nach Satz 27.4 1 läßt sich jede Lösung y der Differentialgleichung dann in impliziter Form $F(x, y(x)) = C$, also $x^2y + e^{(x^2)} + 3y = C$, mit $C \in \mathbb{R}$ schreiben.

Aus der Anfangsbedingung $y(2) = 1$ folgt wegen $F(2,1) = 4 + e^4 + 3 = 7 + e^4$, dass man $C = 7 + e^4$ wählen muss. Folglich ist

$$x^2y + e^{(x^2)} + 3y = 7 + e^4$$

die implizite Lösung des Anfangswertproblems, und man kann noch explizit auflösen:

$$y(x) = \frac{7 + e^4 - e^{(x^2)}}{x^2+3} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 8 **a)** Gegeben war die DGL

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

mit $P(x,y) = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y$ und $Q(x,y) = (x + 3y^2)$. Wir möchten einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$ finden.

Es soll gelten: $(\mu P)_y = \mu P_y \stackrel{!}{=} (\mu Q)_x = \mu' Q + \mu Q_x$, also

$$\mu(x)(2x^2 + 6xy^2 + 1) \stackrel{!}{=} \mu'(x)(x + 3y^2) + \mu(x),$$

oder äquivalent dazu

$$\mu(x)2x(x + 3y^2) = \mu'(x)(x + 3y^2).$$

Dies führt auf die DGL $\mu'(x) = 2x\mu(x)$, wovon $\mu(x) = e^{x^2}$ eine Lösung ist.

Wir können also als integrierenden Faktor $\mu(x) = e^{x^2}$ wählen (ein konstantes Vielfaches ungleich Null davon wäre auch gegangen).

Nun können wir die DGL lösen, indem wir $F(x,y)$ bestimmen mit $F_x = \mu P$, $F_y = \mu Q$. Es gilt also

$$F(x,y) = \int \mu(x)Q(x,y)dy = e^{x^2}\int (x+3y^2)dy = e^{x^2}(xy+y^3+c(x)).$$

Differenzieren nach x ergibt

$$F_x(x,y) = e^{x^2}2x(xy+y^3+c(x))+e^{x^2}(y+c'(x)) = e^{x^2}(2x^2y+2xy^3+2xc(x)+y+c'(x)) = \mu(x)(P(x,y)+2xc(x)+c'(x)).$$

Wir hätten gerne $2xc(x)+c'(x) = 0$, was z.B. bei $c(x) = 0$ der Fall ist.

Somit ist $F(x,y) = e^{x^2}(xy+y^3)$ und die Lösungen $y = y(x)$ der DGL sind gegeben durch

$$F(x,y(x)) = C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b) Wir verfahren wie bei Teil a. $(\mu(x)P(x,y))_y = \mu(x)(3y/x) \overset{!}{=} (\mu(x)Q(x,y))_x = \mu'(x)y$. Dies ist der Fall für $\mu'(x) = 3/x\mu(x)$, also z.B. für $\mu(x) = x^3$.

Wir bestimmen wieder $F(x,y)$.

$$F(x,y) = \int \mu(x)Q(x,y)dy = x^3(\frac{1}{2}y^2 + c(x)).$$

$F_x(x,y) \overset{!}{=} \mu(x)P(x,y)$, also $3x^2(\frac{1}{2}y^2+c(x)) + x^3c'(x) = x^3(2+3y^2/(2x))$, und somit fordern wir $c'(x) = 2 - 3c(x)/x$.

Dies ist erfüllt für $c(x) = \frac{1}{2}x$.

Somit lautet $F(x,y) = x^3(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x)$ und die Lösungen der DGL sind wieder gegeben durch

$$F(x,y(x)) = C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 9 **a)** Die Gleichung ist nicht exakt: $Q_x = y,\ \ P_y = 4y$.
Gesucht ist ein nur von x abhängender integrierender Faktor $\mu = \mu(x)$. Für einen solchen Faktor ist $\mu_y = 0$ und $\mu_x = \mu'$. Aus der Bedingung $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$, also $P\mu_y - Q\mu_x = \mu(Q_x - P_y)$ ergibt sich

$$-yx\mu'(x) = \mu(x)(y-4y) = \mu(x)(-3y), \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3}{x}.$$

Eine spezielle Lösung ($\neq 0$) genügt: $\mu(x) = x^3$. Die Gleichung

$$(x+2x^3y^2)\,dx + yx^4\,dy = 0$$

ist nun exakt. Wir suchen eine Funktion $F = F(x,y)$ mit $F_x = x + 2x^3y^2$ und $F_y = yx^4$.

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4y^2 + C(y) \quad \Longrightarrow \quad F_y = yx^4 + C'(y) \quad \Longrightarrow \quad C'(y) = 0, \text{ also } C(y) = C = \text{const}$$

Die Lösungskurven sind in impliziter Form gegeben durch

$$x^2 + x^4y^2 = C, \quad C = \text{ const } \geq 0.$$

b) Die DGL kann in eine Bernoulli-Differentialgleichung mit Exponent $\alpha = -1$ umgeformt werden. Multiplikation mit $y = y^{-\alpha}$ liefert $yy' = -\frac{2}{x}y^2 - \frac{1}{x^3}$. Die Standarsubstitution $z = y^2,\ z' = 2yy'$ ergibt

$$\frac{1}{2}z' = -\frac{2}{x}z - \frac{1}{x^3}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist $z = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x^4}$. Für unsere ursprüngliche Gleichung bedeutet dies wiederum

$$x^4y^2 + x^2 = C, \quad C = \text{ const } \geq 0.$$

Aufgabe 10 Da die Funktion f holomorph ist, gelten für sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss $u_y = v_x$ gelten. Wir suchen daher Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad u_x = v_y\,, \qquad (2) \quad u_y = -v_x\,, \qquad (3) \quad u_y = v_x\,.$$

Erfüllen u und v diese Gleichungen, so folgt

$$v_x \overset{(3)}{=} u_y \overset{(2)}{=} -v_x\,,$$

d. h. es gilt $v_x = 0$, und damit dann auch $u_y = 0$. Folglich ist $u(x,y) = U(x)$ und $v(x,y) = V(y)$ mit gewissen Funktionen U und V. Wegen (1) folgt $U'(x) = V'(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Das bedeutet aber, dass $U'(x) = V'(y) = a$ mit einer gewissen Konstante $a \in \mathbb{R}$ gelten muss. Somit haben wir

$$u(x,y) = U(x) = ax + c_1\,, \qquad v(x,y) = V(y) = ay + c_2$$

mit gewissen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; man bestätigt nun leicht, dass für diese Funktionen tatsächlich alle drei Gleichungen erfüllt sind. Für $z = x + iy$ folgt

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = ax + c_1 + i(ay + c_2) = az + b\,, \qquad \text{wobei } b := c_1 + ic_2\,.$$

Die Gleichung ist also genau dann exakt, wenn $f(z) = az + b$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ gilt.