Aufgabe 18

1

Lösungen sind

a) $y(x) = c_0 \, e^{-x^2/2} \quad (c_0 \in \mathbb{R})$.

b) $$y(x) = c_0 \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+1}\right] + c_1 x$$
$$= c_0 (1 + x \arctan x) + c_1 x. \quad (c_0, c_1 \in \mathbb{R})$$

Anmerkung: Die Potenzreihe bei b) konvergiert nur für $|x| < 1$, aber in der geschlossenen Form ist y eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.

24.11.09

Ausführliche Lösung der Aufgabe 18b)

Gegeben war die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{*}$$

Um diese zu lösen, gehen wir nach unserem Potenzreihenansatz vor:

1) Bringe die Gleichung (*) auf Standardform, d.h. der Vorfaktor vor der höchsten auftretenden Ableitung von y soll 1 sein.

2) Identifiziere die Potenzreihen der auftretenden Funktionen.

3) Stelle einen Potenzreihenansatz auf und setze in die DGL ein.

4) Leite die Rekursionsformel für die Koeffizienten her.

5) Löse die Rekursionsformel.

1) Division durch $(1+x^2)$ ergibt

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) - \frac{2}{1+x^2}y(x) = 0. \tag{**}$$

2) Die beiden Funktionen $\frac{2x}{1+x^2}$ und $\frac{2}{1+x^2}$ sind Abwandlungen der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x}$. Setzt man in die geometrische Reihe nämlich $-x^2$ statt x ein, so erhält man

$$\frac{2}{1+x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit x, so ergibt sich die zweite Funktion:

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}.$$

Diese Potenzreihen konvergieren für $|x| < 1$ (genauso wie die geometrische Reihe auch).

3) Wir machen den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k$ mit zu bestimmenden $c_k \in \mathbb{R}$. Laut Theorie sind die Lösungen von (*) ja als Potenzreihen darstellbar, die mindestens dort konvergieren, wo die Potenzreihen aus 1) konvergieren, also für $|x| < 1$.
Wir haben

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \\ y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^{k-1}, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (**) ein, so erhält man

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k k x^k \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}. \tag{1}$$

Wir erinnern an das Cauchyprodukt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m} a_l b_{m-l}\right) x^m.$$

Wir wenden dies auf (1) an und erhalten

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + 2\left(\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} c_{k-2l}(k-2l)(-1)^l\right) x^k - 2\left(\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} c_{k-2l}(-1)^l\right) x^k \right\},$$

wobei $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ den (abgerundeten) Ganzteil von $\frac{k}{2}$ bedeutet.

4) Die hinteren beiden Summen der obigen Gleichung kann man noch zusammenfassen und erhält dann direkt die Rekursionsformel

$$0 = c_{k+2}(k+2)(k+1) + 2\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} c_{k-2l}(k-2l-1)(-1)^l \quad (k \geq 0). \tag{2}$$

Durch scharfes Hinsehen erkennt man, dass diese Gleichungen entweder nur Koeffizienten zu ungeradem Index, oder Koeffizienten zu geradem Index enthalten. Dies wird uns auf zwei linear unabhängige Lösungen führen, eine ungerade und eine gerade Funktion.

5) Bestimmen wir zunächst die Koeffizienten mit ungeradem Index. Wir wählen den niedrigsten Index

$$c_1 = \text{beliebig}.$$

Für $k = 1$ lautet die Rekursionsformel (2)

$$0 = 6c_3 + 2c_1 \cdot 0 \cdot (-1)^0,$$

also $c_3 \overset{!}{=} 0$. Für $k = 3$ lautet die Rekursionsformel (2)

$$0 = 20c_5 + 2(c_3 \cdot 2 + c_1 \cdot 0),$$

und da schon $c_3 = 0$ bekannt ist, erhalten wir $c_5 \overset{!}{=} 0$.
Ebenso folgt

$$c_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 1).$$

Bestimmen wir nun die Koeffizienten mit geradem Index. Wir wählen wieder den niedrigsten Index

$$c_0 = \text{beliebig}.$$

Wir schreiben kurz $d_k = c_{2k}$. Dann lautet die Rekursionsformel

$$0 = d_{k+1}(2k+2)(2k+1) + 2\sum_{l=0}^{k} d_{k-l}(2(k-l)-1) \cdot (-1)^l \quad (k \geq 0). \tag{3}$$

Indem man diese Bedingung für ein paar Werte von k überprüft, erhält man die Behauptung:

$$d_k = (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} \cdot c_0 \quad (k \geq 0).$$

Überprüfen wir nun, ob diese d_k die Rekursionsgleichung (3) erfüllen.

$$\begin{aligned} &0 \overset{?}{=} (-1)^k \frac{1}{2k+1}(2k+2)(2k+1) + 2\sum_{l=0}^{k}(-1)^l \frac{1}{2(k-l)-1}(2(k-l)-1)(-1)^{k-l-1} \\ &\iff \\ &0 = (-1)^k(2k+2) + 2(k+1)(-1)^{k-1}, \end{aligned}$$

und die letzte Gleichung ist natürlich erfüllt.

Zusammenfassend erhalten wir die allgemeine Lösung der ursprüunglichen Gleichung (*):

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 x + c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} x^{2k} \\ &= c_1 x + c_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+1}\right) \\ &= c_1 x + c_0(1 + x \arctan x) \quad (c_0, c_1 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Die Potenzreihen in Zeilen eins und zwei haben den Konvergenzradius $R = 1$ (z.B. Quotientenkriterium), was wir schon oben als den minimal garantierten Konvergenzradius identifiziert haben. Andererseits ist die geschlossene Form in Zeile drei eine Lösung von (*) auf ganz $\mathbb{R}$, wie man leicht durch Einsetzen nachprüft.

Aufgabe 19

Gegeben ist die DGL

$$x^2 y'' + \frac{1}{2}(1+x)x\,y' - x\,y(x) = 0. \quad (*)$$

Wir bestimmen zunächst die determinierende Gleichung, im Sinne von 27.10 der Vorlesung:

$p(x) = \frac{1}{2}(1+x)$, also $p_0 = \frac{1}{2}$.

$q(x) = -x$, also $q_0 = 0$.

Damit: $f(\varrho) = \varrho(\varrho-1) + \frac{1}{2}\varrho + 0 = \varrho^2 - \frac{1}{2}\varrho = (\varrho - \frac{1}{2})\cdot\varrho$.

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\varrho_1 = \frac{1}{2}$, $\varrho_2 = 0$, sodass nach Satz aus 27.10 gilt: („$\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}_0$"-Fall)

Ein Fundamentalsystem von $(*)$ ist gegeben durch

$$y_1(x) = |x|^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

mit $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$, und geeigneten c_k, d_k $(k \geq 1)$.

Letztere bestimmen wir mit Potenzreihenansatz.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1/2}$$ (wir beschränken uns auf $x>0$ wie in der Aufg-Stellung)

$$y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\tfrac{1}{2})\, x^{k-\frac{1}{2}}$$

$$y_1''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})\, x^{k-3/2}$$

Einsetzen in $(*)$:

$$0 \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})x^{k+\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}c_k(k+\tfrac{1}{2})(1+x)x^{k+\frac{1}{2}} - c_k x^{k+3/2}$$

$$= c_0\left[-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right]x^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{c_k\left[(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(k+\tfrac{1}{2})\right] + c_{k-1}\left[\tfrac{1}{2}(k-\tfrac{1}{2}) - 1\right]\Big\}\cdot x^{k+\frac{1}{2}}$$

scharf mitdenken!

24.11.09

Daraus lesen wir ab die Rekursionsformel:

$c_0 \neq 0$

$$c_k = c_{k-1} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})}$$

$$= c_{k-1} \cdot \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}k}{k^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}$$

$$= c_{k-1} \cdot \frac{5-2k}{2k(k+1)} \qquad (k \geq 1).$$

Setze $c_0 := 1$.

Dann folgt durch Induktion

$$c_k = (-1)^k \frac{(-3)(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-5)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2k \cdot 3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2k+1)}$$

$$= (-1)^k \frac{3}{2^k k!(2k-3)\cdot(2k-1)(2k+1)}$$

und somit

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{3x^k}{2^k k!(2k-3)(2k-1)(2k+1)}\right]$$

Nun zu y_2.

$$y_2(x) = \sum_0^{\infty} d_k x^k$$
$$y_2'(x) = \sum_0^{\infty} d_{k+1}(k+1)x^k$$
$$y_2''(x) = \sum_0^{\infty} d_{k+2}(k+2)(k+1)x^k.$$

In (*) einsetzen:

$$0 \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+2}(k+2)(k+1)x^{k+2} + \frac{1}{2}d_{k+1}(k+1)(1+x)x^{k+1} - d_k x^{k+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}d_1 - d_0\right)\cdot x^1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[d_k k\cdot(k-1) + \frac{1}{2}d_k k + \frac{1}{2}d_{k-1}(k-1) - d_{k-1}\right]x^k$$

24.11.09

Wir erhalten damit die Bedingungen

$$d_1 = 2 d_0$$

und

$$d_k \cdot \left[k(k-1) + \tfrac{1}{2} k \right] + d_{k-1} \left[\tfrac{1}{2}(k-1) - 1 \right] \overset{!}{=} 0$$

~~also~~ $\Longleftrightarrow$

$$d_k = d_{k-1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}(k-1)}{k(k-1) + \frac{1}{2} k}$$

$$= d_{k-1} \cdot \frac{3/2 - 1/2\, k}{k^2 - 1/2\, k}$$

$$= d_{k-1} \cdot \frac{3 - k}{\cancel{2}k \cdot (2k-1)} \; , \quad (k \geq 1)$$

setzt man,

$$d_0 \overset{!}{=} 1,$$

so ergibt sich

$$d_1 = 2,$$

$$d_2 = d_1 \cdot \frac{3-2}{2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)} = \frac{1}{3},$$

$$d_3 = d_2 \cdot \frac{3-3}{3 \cdot (2 \cdot 3 - 1)} = 0,$$

$$d_4 = 0, \quad d_5 = 0, \; \ldots$$

und damit

$$y_2(x) = 1 + 2x + \frac{1}{3} x^2 .$$

24.11.09

Aufgabe 20

5

Durch Multiplikation der DGL mit x erhält man die folgende DGL passend zur Form in 27.10 der Vorlesung:

$$(*)\quad x^2 y'' + \underbrace{(1-x)}_{=p(x)} x y' + \underbrace{n x}_{=q(x)} y = 0$$

Die determinierende Gleichung wie in der VL, 27.10, lautet $f(\rho)=0$ mit $f(\rho)=\rho(\rho-1)+1\cdot\rho+0$
$=\rho^2$.

Gemäß Satz, mit $\rho_1=\rho_2=0$, hat $(*)$ ein Fundamentalsystem der Gestalt

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{und } y_2(x)=\ln|x|\cdot y_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k.$$

Bestimmen wir y_1 mittels Koeffizientenvergleich.

$$y_1(x)=\sum_0^{\infty} c_k x^k$$
$$y_1'(x)=\sum_0^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k$$
$$y_1''(x)=\sum_0^{\infty} c_{k+2}(k+1)(k+2)x^k$$

In $(*)$ einsetzen:

$$\sum_0^{\infty} c_{k+2}(k+1)(k+2)x^{k+2}+c_{k+1}(k+1)\cdot(1-x)x^{k+1} + n c_k x^{k+1} = 0 \qquad (**)$$

~~Koeffizient von x^0: $=0 \rightsquigarrow$ leere Information~~

~~— " — x^1: c_0~~

23.11.09

Wir formen die linke Seite um und klammern Potenzen von x einheitlich aus. (!) : $(**) \Leftrightarrow$

$$[c_1 + n c_0] x^1 + \sum_{k=2}^{\infty} \Big[c_k (k-1) \cdot k + c_k \cdot k - c_{k-1} (k-1) + n c_{k-1} \Big] \cdot x^k = 0$$

Potenzreihenansatz heißt: alle Terme in $[\ldots] \stackrel{!}{=} 0$

Die Lösungsmenge einer linearen homogenen DGL ist immer ein Vektorraum $\leadsto$ einen Koeff. dürfen wir frei wählen.

Setze $c_0 = 1$. (alles außer Null wäre mögl.)

Koeff. von x^1: $\quad c_1 + n \stackrel{!}{=} 0, \Leftrightarrow c_1 = -n.$

— " — x^2: $\quad c_2 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 - c_1 + n c_1 \stackrel{!}{=} 0$

$$4 c_2 = -(n-1) c_1 = (n-1) \cdot n$$

$$c_2 = \frac{(n-1) \cdot n}{2^2}$$

— " — x^3: $\quad c_3 \cdot 3 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 - c_2 \, 2 + n c_2 \stackrel{!}{=} 0$

$$9 \cdot c_3 = -(n-2) c_2.$$

$$c_3 = -\frac{(n-2)(n-1)n}{(3 \cdot 2)^2} = (-1)^3 \cdot \frac{n!}{(n-3)!} \cdot \frac{1}{(3!)^2}$$

$\leadsto$ Vermutung: Wir können die Koeff. wählen zu: $\boxed{c_k = (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{(k!)^2}}$

„Vollständige Induktion": $k = 0, 1, 2, 3$: ✓ s.o.

Koeffizient von x^{k+1}:

$$c_{k+1} \cdot k \cdot (k+1) + c_{k+1} (k+1) - c_k \, k + n c_k \stackrel{!}{=} 0$$

$$c_{k+1} \cdot (k+1)^2 = -(n-k) c_k = -(n-k)(-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(k!)^2}$$

23. 11. 09

$\Longleftrightarrow \quad c_{k+1} = (-1)^{k+1} \dfrac{n!}{(n-(k+1))!} \cdot \dfrac{1}{((k+1)!)^2}$ ✓

Somit ist (beachte: $c_k = 0$ für $k > n$)

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} x^k$$

eine Lösung von (∗).

Laut Satz aus 27.10 ist eine zweite linear unabh. Lösung gegeben durch

$$y_2(x) = \ln|x| \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \frac{n!}{(n-k)!} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^k.$$

23.11.09

8

Aufgabe 21

a) $y_0(x) = 1.$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x t\, y_0(t)\, dt$$
$$= 1 + \int_0^x t \; dt$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{1}{2}t^2\right) dt$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}x^4.$$
$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^2.$$

Vermutung:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k. \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Vollständige Induktion.

$n = 0, 1, 2$ ✓ s. o.

$n \rightsquigarrow n+1$:

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k dt$$
$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{x^{2k+2}}{2^k \cdot 2(k+1)}$$
$$= \cancel{1} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k \quad ✓$$

$$\text{HMI} \Rightarrow y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$
$$= e^{x^2/2}.$$

Aus dem Iterationsverfahren des Satzes von Picard-Lindelöf folgt, dass y eine Lösung des AWPs ist, denn
$\partial_y f(x,y) = \partial_y [x y] = x$ existiert.

Man kann das natürlich auch leicht direkt prüfen.

24.11.09

9

b) $y_0(x) = 0$

$y_1(x) = \int_0^x t^2 + 0 \, dt = \frac{1}{3}x^3.$

$y_2(x) = \int_0^x t^2 + t \cdot \frac{1}{9} t^6 \, dt$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8 \cdot 9} x^8$

$y_3(x) = \int_0^x t^2 + t\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8 \cdot 9}t^8\right]^2 dt$

$= \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x t\left[\frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{(8\cdot 9)^2}t^{16} + \frac{2}{3 \cdot 8 \cdot 9} t^{11}\right] dt$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8 \cdot 9} x^8 + \frac{1}{(8 \cdot 9)^2 \cdot 18} x^{18} + \frac{2}{3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13} x^{13}.$

Dass die Grenzfkt $y(x) = \lim_n y_n(x)$ existiert und das AWP löst, folgt aus Picard-Lindelöf, denn

$\partial_y f(x,y) = \partial_y [x^2 + xy^2] = 2xy$

existiert.

c) i) ist leicht mit Methoden aus HM II zu prüfen.

ii) $y_0 = 0.$

$y_1(x) = \int_0^x f(t, 0) \, dt$

$= \int_0^x 2t \, dt$

$= \underline{x^2}. \quad (x \in I)$

$y_2(x) = \int_0^x f(t, t^2) \, dt$

$= \int_0^x 2t - 4\frac{t^2}{t} \, dt$

$= \underline{\underline{-x^2}} \quad (x \in I)$

$y_3(x) = \int_0^x f(t, -t^2) \, dt$

$= \int_0^x 2t \quad dt$

$= \underline{\underline{x^2}}.$

Wir brauchen nicht weiterrechnen und sehen an dieser Stelle, dass

$y_n(x) = x^2$ (n ungerade) und ./.

24.11.09

$y_n(x) = -x^2 \quad (n \geq 2,\ n \text{ gerade}).$

iii) $z_1(x) = x^2, \quad z_2(x) = -x^2.$

Es gilt $z_1'(x) = 2x \neq f(x, z_1(x)) = -2x$,
und $z_2'(x) = -2x \neq f(x, z_2(x)) = 2x$.

$\Rightarrow$ Weder z_1 noch z_2 löst das AWP.

(Hinweis: es existiert aber eine Lösung des AWPs!)

10

24.11.09