Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt, WS 2009/2010

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 22 **a)** Die Funktion f ist stetig in x (was gar nicht explizit auftaucht) und y. Daher existieren Lösungen zum AWP nach dem Satz von Peano (vgl. Vorlesung).

b) Falls y Lösung der Differentialgleichung ist, so gilt $y'(x) = f(y(x)) \geq 0$, denn f nimmt nur nichtnegative Werte an. Daher ist y monoton wachsend.

i) Es sei y Lösung der DGL und es gelte $|y(x)| \geq 1$. Idee: y löst auch die modifizierte DGL

$$y'(x) = \widetilde{f}(y(x)) \text{ mit } \tilde{f}(y) = y^2. \tag{1}$$

Dies ist wahr, denn $f(y) = \widetilde{f}(y)$ für alle y mit $|y| \geq 1$, und wir haben zusätzlich vorausgesetzt, dass $|y(x)| \geq 1$ gilt. Da $\widetilde{f}$ im Gegensatz zu f stetig partiell differenzierbar in y ist, ist die Lösung von $y'(x) = \widetilde{f}(y(x))$ zusammen mit einem gegebenen Anfangswert nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig. Damit sind die Funktionswerte von y eindeutig festgelegt durch die folgenden drei Eigenschaften:

y löst die ursprüungliche DGL $y(x) = f(y(x))$, y hat den Anfangswert $y(x_0) = y_0$ für gewisse $x_0,\, y_0 \in \mathbb{R}$, und $|y(x)| \geq 1$.

Als alte Hasen wissen wir, dass die Lösung von (1) zusammen mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ folgendermaßen lautet:

$$y(x) = -(x - x_0 - \frac{1}{y_0})^{-1}$$

(wende z.B. Trennung der Veränderlichen an).

ii) Wir wenden dieselbe Idee wie bei (i) an. Wir notieren den Anfangswert $y_0 := y(x_0)$. y ist eine Lösung der modifizierten DGL

$$y'(x) = \widetilde{f}(y(x)) \text{ mit } \widetilde{f}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & : y \geq y_0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \sqrt{y_0} & : y < y_0 \end{cases}.$$

Man beachte, dass y ja monoton wachsend ist und somit nur die erste Zeile in der Definition von $\widetilde{f}$ zum Tragen kommt. Das wichtige an der zweiten Zeile ist dann nur, dass $\widetilde{f}$ zu einer stetig differenzierbaren Funktion wird. Wieder garantiert uns der Satz von Picard-Lindelöf (angewandt auf die modifizierte DGL), dass y eindeutig festgelegt ist durch die Eigenschaften:

$$y \text{ löst die (ursprüungliche) DGL}, \quad y(x_0) = y_0, \quad 0 < y(x) \leq 1.$$

Und wieder bestimmen wir y mit Trennung der Veränderlichen zu

$$y(x) = \frac{(x-c)^2}{4}.$$

Man hat dann $y'(x) = \frac{(x-c)}{2}$. Dies ist gleich $\operatorname{sign}(y'(x))\sqrt{|y(x)|}$, sodass wir $c < x_0$ fordern.

Bestimmen wir nun die maximalen Lösungen des ursprünglichen Problems.

Vorbemerkung: es ist klar, dass $y(x) = 0$ eine triviale Lösung ist.

Es sei $y : [0, a) \to \mathbb{R}$ eine maximale, also nicht fortsetzbare Lösung. Wir setzen

$$c = \sup\{x \geq x_0 : \ y(x) = 0\}$$

und

$$d = \sup\{x \geq c : \ y(x) \leq 1\}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $|y(x)| \to \infty$ für $x \to a$ gilt ("Blow-up"). Daher gilt $x_0 \leq c < d < a$. Aufgrund der Monotonie wissen wir außerdem, dass y eingeschränkt auf $[c+\varepsilon, d]$ eine Lösung wie in Teil (ii) ist (für jedes $\varepsilon > 0$), und auf $[d, a)$ eine Lösung wie in Teil (i) ist. Da bei a der Blow-up stattfinden muss, gilt $y(x) = -(x-a)^{-1}$ für $x \in [d, a)$, und damit folgt zunächst

$$d = a - 1.$$

Außerdem folgt aus der Stetigkeit von y, dass $y(d) = \frac{(d-c)^2}{4} \overset{!}{=} -(d-a)^{-1} = 1$ gilt, und somit durch Umstellen nach c :

$$c = a - 3.$$

Da $c \geq 0$, folgt schon einmal zwingend $a \geq 3$. Insgesamt folgt, dass y folgende Form haben muss.

$$y(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq a-3 \\ \frac{(x-(a-3))^2}{4} & : x \in (a-3, a-1] \\ -(x-a)^{-1} & : x \in (a-1, a). \end{cases}$$

Umgekehrt ist es leicht zu prüfen, dass dieses y auch eine maximale Lösung des AWPs ist. Zusammen mit der trivialen Lösung $a = \infty$ und $y(x) = 0$ haben wir so alle maximalen Lösungen bestimmt.

Aufgabe 23 **a)** Wir setzen

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}$$

und

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Da y_1, y_2 Lösungen der DGL sind, gilt

$$Y'(t) = A(t)Y(t).$$

Anders gesagt haben wir (Skript HM II 19.9)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(Y(t+h) - Y(t) - hA(t)Y(t) \right) = 0.$$

Wir wollten urspr\u00fcunglich eine Aussage über $w'(t) = (\det Y(t))'$ statt über $Y'(t)$ treffen. Schreibe kurz $r_t(h) = \frac{1}{h} \left(Y(t+h) - Y(t) - hA(t)Y(t) \right)$. Wir haben

$$\begin{aligned} w'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\det Y(t+h) - \det Y(t) \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\det(hr_t(h) + Y(t) + hA(t)Y(t)) - \det Y(t) \right). \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass die Determinante linear in allen Zeilen ist. Daher kann $\det(hr_t(h) + Y(t) + hA(t)Y(t))$ in eine Summe von neun Termen entwickelt werden (drei Wahlen für die erste und drei Wahlen für die zweite Zeile). Diese Terme teilen wir auf in solche, die multipliziert mit $\frac{1}{h}$ für $h \to 0$ gegen 0 gehen, und für die restlichen:

$$\begin{aligned} \det(hr_t(h) + Y(t) + hA(t)Y(t)) = \det(R_t(h)) + \det(Y(t)) + \det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ h\sum_{j=1}^2 a_{2j}(t)y_{1j}(t) & h\sum_{j=1}^2 a_{2j}(t)y_{2j}(t) \end{pmatrix} \\ + \det \begin{pmatrix} h\sum_{j=1}^2 a_{1j}(t)y_{1j}(t) & h\sum_{j=1}^2 a_{1j}(t)y_{2j}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $R_t(h)$ die Terme zusammenfast mit $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \det(R_t(h)) \to 0$. Die obigen Summen $\sum_{j=1}^2 \ldots$ können wir wegen der Linearität der Determinante vor die Determinante rausziehen. Dann ist jeweils nur ein Summand relevant, denn für den anderen hat die entsprechende Matrix zwei linear abhängige Zeilen, die Determinante davon ist also Null. Hieraus schließen wir

$$\begin{aligned} w'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\det(R_t(h)) + a_{22}\det\begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t)\end{pmatrix} + a_{11}\det\begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t)\end{pmatrix} \\ &= (a_{11}(t) + a_{22}(t))w(t). \end{aligned}$$

b) In Teil a) haben wir gesehen, dass $w(t)$ eine lineare Differentialgleichung erfüllt. Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Lösung von der angegebenen Form

$$w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}[a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)]d\tau\right)$$

ist.

Aufgabe 24 Wir bezeichnen die Matrix des gegebenen Systems jeweils mit A.

a) Für das charakteristische Polynom ergibt sich hier

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((1-\lambda)^2+4\big) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)\,, \end{aligned}$$

die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$. Zum reellen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehört der Eigenraum

$$\operatorname{kern}(A-\lambda_1 I) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2\end{pmatrix}\right],$$

und damit erhalten wir als eine Lösung des Systems die Funktion

$$y^{(1)}(t) = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2\end{pmatrix}.$$

Zur komplexen Nullstelle $\lambda_2 = 1+2i$ gehört der Eigenraum

$$\operatorname{kern}\big(A-(1+2i)I\big) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1\end{pmatrix}\right],$$

so dass eine komplexe Lösung des Differentialgleichungssystems gegeben ist durch

$$e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1\end{pmatrix} = e^t\big(\cos(2t)+i\sin(2t)\big)\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t\end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t\end{pmatrix}.$$

Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert dann die zwei reellen Lösungen

$$y^{(2)}(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y^{(3)}(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t\end{pmatrix},$$

und das gesuchte Fundamentalsystem $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ ist bestimmt. Die allgemeine Lösung des Systems lautet $y = c_1y^{(1)} + c_2y^{(2)} + c_3y^{(3)}$ mit $c_1, c_2, c_2 \in \mathbb{R}$.

b)

Wir bestimmen zunächst wieder das charakteristische Polynom von A :

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(9+\lambda^2-6\lambda)(\lambda+1) - 3 - 3 + 3(3-\lambda) + 1 + \lambda - 3(3-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \\
&= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.
\end{aligned}$$

Also ist 1 ein einfacher und 2 ein (algebraisch) doppelter Eigenwert von A.
Nun bestimmen wir die zugehörigen Eigenräume.

$$\begin{aligned}
\mathrm{kern}(A-I) &= \mathrm{kern} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{kern} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{kern} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Für den Eigenwert 2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{kern}(A-2I) &= \mathrm{kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Fundamentalsystem

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25 Zunächst ermitteln wir ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $y' = Ay$. Es gilt

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2+1),$$

d. h. das charakteristische Polynom hat 0 und $\pm i$ als Nullstellen. Wegen

$$\mathrm{kern}(A) = \mathrm{kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

ergibt sich die erste Fundamentallösung

$$y^{(1)}(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\mathrm{kern}(A-iI) = \mathrm{kern} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right]$$

ist die komplexwertige Funktion

$$y(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Lösung; Real- und Imaginärteil liefern zwei weitere Fundamentallösungen. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist dann $y(t) = Y(t)c$ mit $c \in \mathbb{R}^3$ und

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos t & \sin t \\ -1 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung bekommt man nun mit dem Ansatz $y_\mathrm{p}(t) = Y(t)c(t)$ mit einer Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (Variation der Konstanten). Gemäß Vorlesung führt dieser Ansatz auf die Gleichung $Y(t)c'(t) = b(t)$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos t & \sin t \\ -1 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile liefert $c_1'(t) = 2t$, und die beiden anderen Gleichungen lauten dann

$$c_2'(t)\cos t + c_3'(t)\sin t = -2t, \qquad -c_2'(t)\sin t + c_3'(t)\cos t = 2t.$$

Multiplizieren der Gleichungen mit $\sin t$ bzw. $\cos t$ und anschließendes Addieren liefert wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$$c_3'(t) = 2t(\cos t - \sin t),$$

und völlig analog ergibt sich $c_2'(t) = -2t(\cos t + \sin t)$. Jetzt müssen wir noch c_2 und c_3 durch Integration bestimmen: Wegen $\int t \cos t\, dt = t \sin t + \cos t$ und $\int t \sin t\, dt = -t\cos t + \sin t$ kann man

$$\begin{aligned} c_2(t) &= -2t\sin t - 2\cos t + 2t\cos t - 2\sin t = 2(t-1)\cos t - 2(t+1)\sin t, \\ c_3(t) &= 2t\sin t + 2\cos t + 2t\cos t - 2\sin t = 2(t+1)\cos t + 2(t-1)\sin t \end{aligned}$$

wählen. Mit $c_1(t) = t^2$ erhält man dann die spezielle Lösung

$$y_\mathrm{p}(t) = Y(t)c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 + 2(t-1)(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ -t^2 + 2(t+1)(\cos^2 t + \sin^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 + 2t - 2 \\ -t^2 + 2t + 2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also $y(t) = y_\mathrm{p}(t) + Y(t)c$ mit $c \in \mathbb{R}^3$. Es folgt $y(0) = (0, -2, 2) + Y(0)c$, und damit dies $= (0, 0, 1)$ ist, muss die Gleichung $Y(0)c = (0, 2, -1)$ erfüllt sein. Wir haben daher noch das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zu lösen, und dies liefert $(c_1, c_2, c_3) = (0, 2, -1)$. Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(t) = y_\mathrm{p}(t) + Y(t)c = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 + 2t - 2 \\ -t^2 + 2t + 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26 Es gilt

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(\tilde{x})\| &= \|L \circ D \circ M(x) - L \circ D \circ M(\tilde{x})\| \\ &= \|D \circ M(x) - D \circ M(\tilde{x})\| \\ &= \|D \circ M(x - \tilde{x})\| \\ &= \|M(x - \tilde{x})\| \\ &= \frac{1}{50}\|x - \tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile folgt direkt aus der Definition der Translation L. Die dritte Zeile folgt aus der Linearität von D und M. Die vierte Zeile folgt aus

$$\begin{aligned}
\|D(y_1, y_2)\|^2 &= (\cos(\varphi)y_1 + \sin(\varphi)y_2)^2 + (-\sin(\varphi)y_1 + \cos(\varphi)y_2)^2 \\
&= \cos^2(\varphi)y_1^2 + \sin^2(\varphi)y_2^2 + \sin^2(\varphi)y_1^2 + \cos^2(\varphi)y_2^2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 \\
&= \|(y_1, y_2)\|^2.
\end{aligned}$$

Die fünte Zeile folgt schließlich direkt aus der Definition von M.
Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir wissen:
B ist eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes: $\mathbb{R}^2$ ist Banachraum bezüglich der Euklidnorm (klar) und B ist abgeschlossen darin (klar).
T bildet B nach B ab: Klar, denn laut Aufgabenstellung fällt die Karte auf den Lagerraumboden.
T ist eine Kontraktion: Haben wir gerade nachgerechnet.