Ergänzung zum 4. Tutorium

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Beispiel 3

Bestimmen Sie die ersten Glieder der Potenzreihenlösung von

$$y'' - \frac{2}{1-x}y' + \frac{1}{1-x}y = 0.$$

Für welche x konvergiert die Potenzreihe (mindestens)?

Lösung

Wir erhalten folgende Potenzreihenentwicklungen für die auftretenden Funktionen:

$y(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} c_jx^j$ (Ansatz)

$y'(x) = 1c_1x^0 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}x^j$

$\frac{1}{1-x} = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$ (geom. Reihe, Konvergenzradius: 1)

$-2y'(x) + y(x) = ((-2)1c_1 + c_0)x^0 + ((-2)2c_2 + c_1)x^1 + ((-2)3c_3 + c_2)x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}((-2)(j+1)c_{j+1} + c_j)x^j$

$-\frac{2}{1-x}y' + \frac{1}{1-x}y = (-2y'(x) + y(x))\frac{1}{1-x} = \frac{-2y'+y}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}((-2)(k+1)c_{k+1}+c_k)x^kx^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}((-2)(k+1)c_{k+1}+c_k)x^j$ (Cauchy-Produkt)

Dabei können wir c_0 und c_1 frei wählen.

Koeefizientenvergleich liefert nun:

	y''	$\frac{-2y'+y}{1-x}$	Rechte Seite
x^0 :	$1 \cdot 2c_2$	$-2c_1 + c_0$	0
x^1 :	$2 \cdot 3c_2$	$-2c_1 + c_0 + c_1 - 4c_2 \quad (= 1 \cdot 2c_2 + c_1 - 4c_2)$	0
x^2 :	$3 \cdot 4c_3$	$-2c_1 + c_0 + c_1 - 4c_2 + c_2 - 6c_3 \quad (= 2 \cdot 3c_2 + c_2 - 6c_3)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^j :	$(j+1)(j+2)c_{j+2}$	$(= j(j+1)c_{j+1} + c_j - 2(j+1)c_{j+1})$	0

Wir erhalten

$$(j+1)(j+2)c_{j+2} + j(j+1)c_{j+1} + c_j - 2(j+1)c_{j+1} = 0,$$

also

$$c_{j+2} = -\frac{j(j+1)c_{j+1} + c_j - 2(j+1)c_{j+1}}{(j+1)(j+2)} = c_{j+1} - \frac{1}{(j+1)(j+2)}c_j$$

für $j = 0, 1, \ldots$.

Wir berechnen damit die ersten Koeffizienten:

$(j = 0{:})$	c_2	$= c_1 - \frac{1}{1\cdot 2}c_0$	$= -\frac{1}{2}c_0 + c_1$
$(j = 1{:})$	c_3	$= c_2 - \frac{1}{2\cdot 3}c_1$	$= -\frac{1}{2}c_0 + \frac{5}{6}c_1$
$(j = 2{:})$	c_4	$= c_3 - \frac{1}{3\cdot 4}c_2$	$= -\frac{-11}{24}c_0 + \frac{3}{4}c_1$

(Eine geschlossene Form ist nicht erkennbar.)

Die Potenzreihenlösung beginnt also mit

$$y(x) = c_0(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{-11}{24}x^4 + (\ldots?)) + c_1(x^1 + 1x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + (\ldots?)).$$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$.