Ergänzung zum 5. Tutorium

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

DGL-Systeme erster Ordnung / AWP

$$\boxed{\vec{y}\,' = F(x,\vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y_0}}$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F : D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{F \text{ stetig}, \quad (x_0, \vec{y_0}) \in D}$$

Übersicht

Voraussetzung an F	Aussage	Hinweis
keine (außer Stetigkeit)	• Existenz mind. einer Lsg. • max. Ex.-Intervalle („bis zum Rand von D“) (Satz von *Peano*)	i. A. keine Eindeutigkeit und unterschiedlich große Ex.-Intervalle (s. Aufg. 22)
F bzgl. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ stetig differenzierbar	*zusätzlich:* • Eindeutigkeit (Satz von *Picard-Lindelöf*)	Beweis mit Banachschem Fixpunktsatz
$F(t,\vec{y}) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$, wobei $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig I Intervall ($D = I \times \mathbb{R}^n$) (*lineares* DGL-System)	*zusätzlich:* (Ohne Anfangswerte) • hom. System ($b \equiv 0$) hat n-dim. Lsg.-raum • Variation-der-Konstanten-Formel, um Lsg. des inhom. Problems zu ermitteln • „allg. Lsg.= *allg.* Lsg. d. hom. Problems + *eine* spezielle Lsg. d. inhom. P.“	• Schreibweise: $F(t,\vec{y}) = \ldots$ statt $F(x,\vec{y}) = \ldots$ • $\frac{\partial}{\partial \vec{y}} F(t,\vec{y}) = A(t)$
$F(t,\vec{y}) = A\vec{y}(t)$, wobei $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konst. (*lineares* DGL-System *mit konst. Koeff.*)	*zusätzlich:* (Ohne Anfangswerte) • „vollständige Lösungstheorie“	Erhalte Fundamental-S. nach • 29.2/29.3 (EW von A & Basis der Haupträume) oder • „e^{tA}“