Ergänzung zum 6. Tutorium

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

I. Beispiele partieller Differentialgleichungen

Hier:
jeweils partielle Differentialgleichung von *zweiter Ordnung*,
gesuchte Lösung $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u = u(x, y, z)$.

$3u_{xx}$	$+7u_{xz}$	$+5u$	$=0$	*linear*	(mit konst. Koeff., homogen)
zyu_{xx}	$+\sin(x)u_{xz}$	$+x^2u$	$=e^{x+y}$	*linear*	(inhomogen)
zyu_{xx}	$+\sin(x)u_{xz}$	$+u^2$	$=e^{x+y}$	*quasilinear*	(„genauer“: semilinear)
zyu_{xx}	$+\sin(x)u_{xz}$	$+u_yu$	$=e^{x+y}$	*quasilinear*	(„genauer“: semilinear)
zyu_{xx}	$+u_yu_{xz}$	$+u_yu$	$=e^{x+y}$	*quasilinear*	
zyu_{xx}	$+u_{xy}u_{xz}$	$+u_yu$	$=e^{x+y}$	*voll nicht-linear*	

II. Beispiel zu Charakteristiken

Bestimme die Lösung folgender PDE:

$$2x_1x_2\partial_{x_1}u + \partial_{x_2}u = u, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$u(x_1, 0) = x_1$$

Lösung:

Für die entsprechenden Bezeichnungen aus der Vorlesung gilt:
$\vec{a}(x_1, x_2, u) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b(x_1, x_2, u) = u$.

Anfangswerte sind vorgegeben auf $\Gamma = \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$.

Das charakteristische System lautet:

$$\vec{k}'(s) = \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) = \vec{a}(k_1(s), k_2(s), w(s)) = \begin{pmatrix} 2k_1(s)k_2(s) \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$w'(s) = b(\vec{k}(s), w(s)) = b(k_1(s), k_2(s), w(s)) = w(s).$$

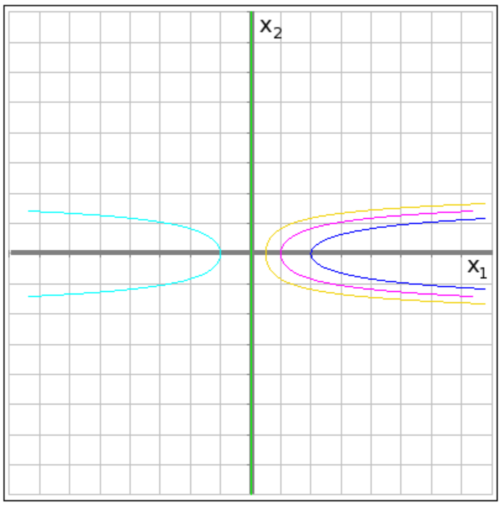
Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ lösen wir das charakteristische System mit folgenden Anfangswerten (vgl. Skriptum S. 36): $\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\xi, 0) \end{pmatrix}$.
Also $k_1(0) = \xi$, $k_2(0) = 0$, $w(0) = f(\xi, 0) = \xi$.

Somit folgt $k_2(s) = s$ und damit $k_1'(s) = 2k_1(s) \cdot s$, also $k_1(s) = \xi e^{s^2}$. Außerdem folgt $w(s) = \xi e^s$.

Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ erhalten wie so eine Charakteristik. Diese bezeichnen wir mit $\vec{k}(\cdot, \vec{\xi})$, $w(\cdot, \vec{\xi})$.
(Es gilt also $\vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi e^{s^2} \\ s \end{pmatrix}$ und $w(s, \vec{\xi}) = \xi e^s$ für alle $s \in \mathbb{R}$.)

Zur Veranschaulichung zeichnen wir einige Grundcharakteristiken (nämlich für $\xi = 0$ (grün), für

$\xi = 1/2$ (gelb), $\xi = 1$ (violett), $\xi = 2$ (blau) und für $\xi = -1$ (türkis) in den Argumentraum:



(Das ist natürlich jeweils der „gedrehte“ Funktionsgraph der Funktion $s \mapsto \xi e^{s^2}$.)

Wir wollen nun den Wert der Lösung an einer (beliebigen aber festen) Stelle (x_1, x_2) bestimmen. Dazu überlegen wir uns, welche Grundcharakteristik durch (x_1, x_2) verläuft: Wir suchen also $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ so, daß es ein s gibt mit $\vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Das ist gleichbedeutend mit $\begin{cases} k_1(s, \vec{\xi}) = \xi e^{s^2} = x_1 \\ k_2(s, \vec{\xi}) = s = x_2 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} s = x_2 \\ \xi = x_1 e^{-x_2^2} \end{cases}$.

(Das bedeutet: Die Grundcharakteristik $\vec{k}(\cdot, \begin{pmatrix} x_1 e^{-x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix})$ (und nur diese) verläuft durch den Punkt (x_1, x_2) (und zwar bei $s = x_2$). Wir haben also wieder den Fall, daß die Grundcharakteristiken den gesamten Argumentraum überdecken und sich nicht schneiden.)

Den Wert der Lösung an der Stelle (x_1, x_2) erhalten wir jetzt durch Auswerten von $w(\cdot, \begin{pmatrix} x_1 e^{-x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix})$ bei $s = x_2$:

$u(x_1, x_2) = u(\vec{k}(x_2, \begin{pmatrix} x_1 e^{-x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix})) = w(x_2, \begin{pmatrix} x_1 e^{-x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}) = x_1 e^{-x_2^2} e^{x_2} = x_1 e^{x_2 - x_2^2}$.