

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Abgabe: bis Donnerstag, den 17.01.2008, 11:30 Uhr, neben Raum 305

Aufgabe 37

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

a) $f(x) := \sqrt{x}$,

b) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 38 (K)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xe^{-nx}$ ($n \in \mathbb{N}$), b) $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto nxe^{-nx}$ ($n \in \mathbb{N}$),

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx - n^2}$ ($x \in (0, 1)$), d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(1 + x^4)^n}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 39

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie:

(1) Ist $\inf\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}, x \in [a, b]\} > 0$, so konvergiert $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

(2) Sind f und alle f_n , $n \in \mathbb{N}$, stetig und ist $g \in C(\mathbb{R})$, so konvergiert $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ (*Hinweis: stetige Funktionen auf Kompakta sind gleichmäßig stetig*).

Aufgabe 40 (K)

- (1) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, daß $g \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.
- (2) Seien $f, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, φ sei differenzierbar in 0, und es gelte $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Es gelte außerdem

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\varphi(x - y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß f auf \mathbb{R} differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung f' .

Übungsblatt

Jeden Donnerstag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann vor dem Sekretariat Zi. 305 im Mathematikgebäude abgeholt werden oder von

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/milweis/lehre/hmiinf2007w/>

heruntergeladen werden. Die beiden **K**-Aufgaben können zur Korrektur abgegeben werden. Die bearbeiteten Aufgaben werden in die Einwurfschlitze neben Zi. 305 geworfen. Bitte vermerken Sie deutlich Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe. Die Rückgabe der korrigierten Übungsblätter erfolgt in den Übungsgruppen.

Link zur Lernplattform ILIAS

<https://ilias.rz.uni-karlsruhe.de/>