UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl. Math. Alexander Ullmann

WS 2007/2008
14.02.2008

15. Übungsblatt

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

— keine Abgabe —

Aufgabe 57

Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen, indem Sie die Berechnung durch geeignete Substitution auf die Berechnung von Stammfunktionen rationaler Funktionen zurückführen:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{\log^4 x - 1}{x(\log^3 x + 1)}\,dx,$ **d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}.$

Aufgabe 58

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}}{(2x-1)^2}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx,$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y}{\sinh y - y}\,dy,$ **d)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \quad (s < 0,\ t \in \mathbb{R}).$

Aufgabe 59

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\log(1+t)\,dt$ **b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{\cosh x - 1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^4\,dx$ **d)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^a}{e^t - 1}\,dt \quad (a \in \mathbb{R})$

Aufgabe 60

a) Die Funktion $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ sei monoton fallend. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert}\,.$$

b) Es sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das Integral

$$\int_0^\infty g(x)\,dx$$

konvergiert. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass g nicht beschränkt sein muss.

Aufgabe 61

a) Es sei $x > 0$. Zeigen Sie, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \text{und} \quad \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

konvergieren und dass somit die Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

gilt, und folgern Sie

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 62

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller 8-ten Einheitswurzeln.

b) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ an.

c) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\, 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ besteht die Identität

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kz) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin(\frac{1}{2}z)}\,.$$