UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Sommersemester 2008
07.06.2008

Diplom–Vorprüfung Integraltransformationen
bzw.
Bachelor-Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Aufgabe 1 (3+2+2+3=10 Punkte)

Ein Übertragungsglied mit Eingang u und Ausgang y sei durch die Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1 u' + b_0 u \qquad (*)$$

gegeben mit Koeffizienten $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$.

a) Für das System gelte

$$y'' + 2y' - 3y = 3u' - u.$$

i) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems an.

ii) Untersuchen Sie das Verhalten der Gewichtsfunktion $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(s)$ für

1) $t \to 0+$.

2) $t \to \infty$.

b) Die Übertragungsfunktion des Systems $y'' + 4y' + 3y = u' + u$ lautet $G(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+3}$. Geben Sie sowohl die Impulsantwort als auch die Sprungantwort dieses Systems an.

c) Es gelte $b_1 = 0$ und $b_0 \neq 0$. Ordnen Sie jeder der folgenden Bedingungen

A) $a_1^2 \geqslant 4a_0$

B) $a_1 < 0$ und $a_1^2 < 4a_0$

C) $a_1 = 0$ und $a_0 > 0$

D) $a_1 > 0$ und $a_1^2 < 4a_0$

an die Parameter a_0, a_1 zu, ob die Impulsantwort des durch $(*)$ gegebenen Systems

I) eine abklingende Schwingung enthält.

II) eine aufklingende Schwingung enthält.

III) eine Dauerschwingung mit konstanter Amplitude enthält.

IV) keine Schwingungsterme enthält.

Begründen Sie Ihre Antworten.

d) Nun sei speziell

$$y'' - 4y' + 4y = u$$

mit $u(t) = e^{2t}t^2$, $t \geqslant 0$. Bestimmen Sie mit der Laplacetransformationsmethode die Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

genügt.

Aufgabe 2 (3+1+6=10 Punkte)

a) **i)** Es sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \max(\gamma, 0)$ gilt

$$s\,\mathscr{L}\{\int_0^t g(r)\,dr\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s).$$

ii) Geben Sie eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ an mit $y(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$y(t) + \int_0^t y(r)\,dr = \frac{1}{2}\,t^2 \qquad \text{für } t \geqslant 0.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty te^{-3t^2}\sin(4t^2)\,dt.$$

Hinweis: Substituieren Sie geeignet.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t+1 & \text{für } t \in [0,1) \\ \cos(t-1)\cosh(2t) & \text{für } t \geqslant 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$.

i) Bestimmen Sie $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \gamma$ konvergiert. Wie lautet $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für diese s?

ii) Ermitteln Sie $\mathscr{L}\{D[f]\}$, ohne die distributionelle Ableitung $D[f]$ zu berechnen.

iii) Bestimmen Sie $D[f]$.

Aufgabe 3 (3+4+3=10 Punkte)

a) Geben Sie die Laurententwicklung der Funktion

i)

$$F(z) := \frac{z}{z-2}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ an, die für $z \neq 2$ konvergiert.

ii)

$$F(z) := \frac{1}{z(z+3)}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 = -3$ an, die auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+3| < 3\}$ konvergiert.

b) Bestimmen Sie für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die folgenden Kurvenintegrale

i) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1-\cos(z)}{z}\, dz = \int_{\gamma} \frac{1-\cos(z)}{z}\, dz, \quad \text{wobei } \gamma(t) = e^{it}\,;$

ii) $\displaystyle\int_{|z-\frac{1+i}{2}|=1} \frac{3z^2+1}{z^4-1}\, dz = \int_{\gamma} \frac{3z^2+1}{z^4-1}\, dz, \quad \text{wobei } \gamma(t) = \tfrac{1+i}{2} + e^{it}\,.$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der komplexen Umkehrformel

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}.$$

Hinweise:

(I) Welche Ordnung haben die Polstellen?

(II) Verwenden Sie: Sind $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ verschieden, $c > \max\big(\mathrm{Re}(a_1), \ldots, \mathrm{Re}(a_m)\big)$ und $\widetilde{F} : \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_m\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|\widetilde{F}(s)| \longrightarrow 0$ für $|s| \to \infty$, dann gilt für jedes $t > 0$:

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\, ds = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{res}(e^{st}\widetilde{F}(s); a_j).$$

Aufgabe 4 (2+2+3+3=10 Punkte)

a) Gegeben sei eine stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$. Zeigen Sie:

Ist f gerade (d.h. $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$), dann ist $\mathscr{F} f$ reellwertig, und es gilt

$$\mathscr{F} f(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \cos(\omega t) f(t)\,dt \qquad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

b) Es sei

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie:

$$\mathscr{F} f(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(\omega)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2 & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \qquad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

c) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $\mathscr{F}(g * g)$ mit Hilfe von Rechenregeln der Fouriertransformation. Berechnen Sie dann $g * g$, indem Sie verwenden, dass gilt:

$$\begin{cases} 1 - |t| & \text{für } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \begin{cases} \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{für } \omega = 0 \end{cases}.$$

d) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |h'(t)|\,dt < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |h''(t)|\,dt < \infty$. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $C \geqslant 0$ mit

$$|\mathscr{F} h(\omega)| \leqslant \frac{C}{1+\omega^2} \qquad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R},$$

und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F} h(\omega)|\,d\omega < \infty.$$

Viel Erfolg!