Aufgabe 15 Wir betrachten für $m > 0$ die *sine-Gordon-Gleichung*

$$\partial_{tt}u(t,x) - \Delta u(t,x) + mu(t,x) = \sin(\operatorname{Re} u(t,x)), \quad u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x). \tag{2}$$

Beweisen Sie mithilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass (2) für jedes $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ und $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ genau eine milde Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$ besitzt.

Lösung: In der Übung haben wir mithilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes bereits gezeigt, dass die Gleichung

$$U'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} U(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\operatorname{Re} U_1(t)) \end{pmatrix}, \qquad U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

genau eine milde Lösung $U \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d))$ besitzt. Es verblieb nun noch zu zeigen, dass U_1 ein Element von $C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$ und die eindeutige Lösung der Gleichung

$$w(t) = \widetilde{T}_{11}(t)u_0 + \widetilde{T}_{12}(t)u_1 + \int_0^t \widetilde{T}_{12}(t-s)\sin(\operatorname{Re} w(s))\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

ist, wobei $(\widetilde{T}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ die von A erzeugte C_0-Gruppe ist.

Nach Vorlesung existieren $(u_{0,n}, u_{1,n})_{n\geq 1} \subseteq D(A)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (u_{0,n}, u_{1,n}) = (u_0, u_1) \qquad \text{in } H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$$

und klassische Lösungen $U_n \in C^1(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d))$ zu $(u_{0,n}, u_{1,n})$ von (3) mit $\lim_{n\to\infty} U_n = U$ in $C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d))$ für jedes beliebige $T > 0$. Nun gilt aber $U_{n,1} \in C^1([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d))$, $U_{n,2} \in C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ und

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_{n,1} = \lim_{n\to\infty} U_{n,2} &= U_2 && \text{in } C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d)), \\ \lim_{n\to\infty} U_{n,1} &= U_1 && \text{in } C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d)) \subset C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

D.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_1 = U_2 \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$, woraus die erste Behauptung folgt.

Da U eine milde Lösung von (3) ist, folgt direkt, dass auch U_1 eine Lösung von (4) ist. Für die Eindeutigkeit schätzen wir wie in der Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach ab und erhalten für zwei Lösungen u und v von (4)

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}s.$$

Nach Gronwall folgt hieraus schließlich $u = v$.