Aufgabe 24 Seien $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$ und $p' = \frac{p}{p-1} \in (1,\infty)$.

b) Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\varphi = \{\xi \in \mathbb{R}^d \colon |\xi| \le 2\}$, $\varphi = 1$ auf $\{\xi \in \mathbb{R}^d \colon |\xi| \le 1\}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k(\xi) = \varphi(\xi) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(\xi) = 1$ für $\xi \neq 0$, wobei $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi) - \varphi(2^{-k+1}\xi)$ für $k \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie in diesem Fall die folgende Normäquivalenz:

$$\|f\|_{W^{s,p}} \eqsim \|\varphi(D)f\|_{L^p} + \Big\| \Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0(2tD)f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p}, \quad f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d).$$

Lösung: In der Übung haben wir bereits mit Hilfe von Mihlin gezeigt, dass

$$\|\varphi(D)f\|_{L^p} + \Big\| \Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0(2tD)f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \le C_{\alpha,p,s}\|f\|_{W^{s,p}} \tag{1}$$

für eine Konstante $C_{\alpha,p,s} > 0$ und $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$. Für die andere Richtung genügt es $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zu betrachten, da wegen $J_s(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ auch Schwartzfunktionen in $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ dicht liegen. Mit einfacher Substitution folgt

$$\int_0^\infty \varphi_0(t^{-1}\xi)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty \varphi_0(2t\xi)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

und somit aus Aufgabe 20 für $\mathcal{F}^{-1}\big((1-\varphi(8\cdot))(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)$ die Identität

$$\begin{aligned} J_s(f) &= \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(8\cdot)(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big) + \mathcal{F}^{-1}\big((1-\varphi(8\cdot))(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(8\cdot)(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big) + \int_0^\infty \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)(1-\varphi(8\cdot))(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)\frac{\mathrm{d}t}{t}. \end{aligned}$$

Eine genaue Betrachtung der Träger von φ und φ_0 zeigt, dass

$$\varphi_0(2t\xi)(1-\varphi(8\xi)) = \begin{cases} 0, & \text{für } t \ge 8, \\ \varphi_0(2t\xi)(1-\varphi(8\xi)), & \text{für } 1 \le t \le 8, \\ \varphi_0(2t\xi), & \text{für } t \le 1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)(1-\varphi(8\cdot))(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &\quad = \int_0^1 \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^8 \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)(1-\varphi(8\cdot))(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)\frac{\mathrm{d}t}{t}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die einzelnen Summanden getrennt.

1) Auf $\operatorname{supp}\varphi(8\cdot) = \{\xi \in \mathbb{R}^d \colon |\xi| \le \frac{1}{4}\}$ ist $\varphi = 1$ und somit $m := \frac{\varphi(8\cdot)}{\varphi}(1+|\cdot|^2)^{s/2} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $\check{m} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Aus der Ungleichung von Young folgt hier

$$\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(8\cdot)(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)\big\|_{L^p} = \big\|\check{m} * \varphi(D)f\big\|_{L^p} \le \|\check{m}\|_{L^1}\|\varphi(D)f\|_{L^p}.$$

2) Für $t \in [1,8]$ ist $\operatorname{supp}\varphi_0(2t\cdot) = \{\xi \in \mathbb{R}^d \colon \frac{1}{4t} \le |\xi| \le \frac{1}{t}\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \colon |\xi| \le 1\}$, d.h. $\varphi = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi_0(2t\cdot)$. Damit ist

$$\xi \mapsto m_t(\xi) := \varphi_0(2t\xi)(1-\varphi(8\xi))(1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi(\xi)^{-1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

und wieder folgt aus der Young'schen Ungleichung und Minkowski

$$\begin{aligned} &\Big\|\int_1^8 \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)(1-\varphi(8\cdot))(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big\|_{L^p} \\ &\qquad \le \int_1^8 \big\|\check{m_t} * \varphi(D)f\big\|_{L^p}\frac{\mathrm{d}t}{t} \le A\|\varphi(D)f\|_{L^p}, \end{aligned}$$

wobei $A := \ln 8 \cdot \sup_{t\in[1,8]} \|\check{m_t}\|_{L^1}$.

3) Für den letzten Summanden erhalten wir für jedes $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit Fubini und Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^1 \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)(x) \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)\, \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\cdot|^2)^{-s/2}\widehat{g}\big)(x)\, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)\widehat{f}\big)(x) g(x)\, \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Wie im Beweis von Aufgabe 20 finden wir nun ein $\varphi_0^{(2)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi_0^{(2)} = 1$ auf $\operatorname{supp} \varphi_0$ und

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)\widehat{f}\big)(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)\widehat{f}\big)(x)\, \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0^{(2)}(-2t\cdot)\widehat{g}\big)(x)\, \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 t^{-s}\big(\varphi_0(2tD)f\big)(x)\, t^s\big(\varphi_0^{(2)}(2tD)g(-\cdot)\big)(-x) \frac{\mathrm{d}t}{t}\, \mathrm{d}x.$$

Wenden wir nun die Ungleichung von Hölder an, so erhalten wir mit (1)

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^1 \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi_0(2t\cdot)(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)(x) \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big) \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\cdot|^2)^{-s/2}\widehat{g}\big)(x)\, \mathrm{d}x \Big|$$
$$\leq \Big\| \Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0(2tD)f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \Big\| \Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0^{(2)}(2tD)g(-\cdot)\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_{L^{p'}}$$
$$\leq C_{\alpha,p,s} \Big\| \Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0(2tD)f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \|g\|_{W^{-s,p'}}.$$

Fügen wir nun alle Teile zusammen, so folgt für ein beliebiges $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} J_s(f) J_{-s}(g)\, \mathrm{d}x \Big| \leq \big(\|\check{m}\|_{L^1} + A\big) \|\varphi(D)f\|_{L^p} \|g\|_{W^{-s,p'}}$$
$$+ C_{\alpha,p,s} \Big\| \Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0(2tD)f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \|g\|_{W^{-s,p'}}.$$

Damit erhalten wir mit Aufgabenteil a) schließlich

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|g\|_{W^{-s,p'}}=1} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} J_s(f) J_{-s}(g)\, \mathrm{d}x \Big|$$
$$\leq C_{\alpha,p,s}^{(2)} \Big(\|\varphi(D)f\|_{L^p} + \Big\| \Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0(2tD)f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \Big)$$

für eine Konstante $C_{\alpha,p,s}^{(2)} > 0$.