Aufgabe 6 c) Seien $-\infty < s_1 < s < s_2 < \infty$ und

$$s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \qquad \text{für ein } \theta \in (0,1).$$

Zeigen Sie, dass dann ein $C > 0$ existiert, sodass für alle $\varepsilon > 0$ und $f \in H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ folgende Ungleichungen gelten:

$$\|f\|_{H^s} \le \|f\|_{H^{s_1}}^{1-\theta}\|f\|_{H^{s_2}}^{\theta} \le \varepsilon\|f\|_{H^{s_2}} + C\varepsilon^{-\frac{\theta}{1-\theta}}\|f\|_{H^{s_1}}.$$

Lösung: Aus der Ungleichung von Hölder ($p = \frac{2}{1-\theta}$, $p' = \frac{2}{\theta}$) folgt direkt

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^s} &= \|w_s\widehat{f}\|_{L^2} = \|w_{s_1}^{1-\theta}\widehat{f}^{1-\theta}w_{s_2}^{\theta}\widehat{f}^{\theta}\|_{L^2} \le \|w_{s_1}^{1-\theta}\widehat{f}^{1-\theta}\|_{L^{\frac{2}{1-\theta}}}\|w_{s_2}^{\theta}\widehat{f}^{\theta}\|_{L^{\frac{2}{\theta}}} \\ &= \|w_{s_1}\widehat{f}\|_{L^2}^{1-\theta}\|w_{s_2}\widehat{f}\|_{L^2}^{\theta} = \|f\|_{H^{s_1}}^{1-\theta}\|f\|_{H^{s_2}}^{\theta}.\end{aligned}$$

Für ein beliebiges $\widetilde{\varepsilon} > 0$ folgt hieraus außerdem

$$\|f\|_{H^s} \le \|f\|_{H^{s_1}}^{1-\theta}\|f\|_{H^{s_2}}^{\theta} = \left(\widetilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{1-\theta}}\|f\|_{H^{s_1}}\right)^{1-\theta}\left(\widetilde{\varepsilon}^{\frac{1}{\theta}}\|f\|_{H^{s_2}}\right)^{\theta}.$$

Wähle nun $\widetilde{\varepsilon} := \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^{\theta} > 0$. Dann erhalten wir schließlich mit der Young'schen Ungleichung ($p = \frac{1}{1-\theta}$, $p' = \frac{1}{\theta}$)

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^s} &\le \|f\|_{H^{s_1}}^{1-\theta}\|f\|_{H^{s_2}}^{\theta} \le (1-\theta)\widetilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{1-\theta}}\|f\|_{H^{s_1}} + \theta\widetilde{\varepsilon}^{\frac{1}{\theta}}\|f\|_{H^{s_2}} \\ &= \underbrace{(1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}}_{=:C>0}\varepsilon^{-\frac{\theta}{1-\theta}}\|f\|_{H^{s_1}} + \varepsilon\|f\|_{H^{s_2}}.\end{aligned}$$