KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2015
22. April 2015

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Temperierte Distributionen)

a) Sei $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ mit der Eigenschaft, dass ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ existiert mit

$$\int_{|x|\le R} |h(x)|\,\mathrm{d}x \le C(1+R)^N \qquad \text{für alle } R > 0.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$u_h(f) := h(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

eine temperierte Distribution definiert.

b) Sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine langsam wachsende Funktion, deren Ableitungen ebenfalls langsam wachsen, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ existiere ein $N_\alpha > 0$ und ein $C_\alpha > 0$ sodass

$$|D^\alpha \psi(x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{N_\alpha} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass dann für jedes $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ durch

$$(\psi u)(f) := u(\psi f), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

eine temperierte Distribution gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass die durch die Funktion $\log|x|$ gegebene Distribution ein Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ist.

Aufgabe 2 (Distributionelle Ableitungen)

a) Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ sodass $D^\alpha h$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ eine langsam wachsende Funktion ist . Zeigen Sie, dass dann für jedes $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ die folgende Identität gilt:

$$\partial_{x_k}(hu) = (\partial_{x_k} h)u + h(\partial_{x_k} u), \qquad k = 1, \dots, d.$$

b) Zeigen Sie, dass für jedes $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

$$D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha (D^\beta u).$$

c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und δ_{x_0} die Delta-Distribution in x_0. Bestimmen Sie $\mathcal{F}(D^\alpha \delta_{x_0})$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

d) Bestimmen Sie $\mathcal{F}\big((-2\pi i x)^\alpha\big)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

e) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Distribution $\log|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (Translation, Dilation, Reflexion)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $a > 0$. Definiere für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ die Operationen

$$\begin{aligned} \tau^y(f)(x) &:= f(x-y) & \tau^y(u)(f) &:= u(\tau^{-y} f) & &\text{(Translation)} \\ \delta^a(f)(x) &:= f(ax) & \delta^a(u)(f) &:= u(a^{-d}\delta^{1/a} f) & &\text{(Dilation)} \\ \widetilde{f}(x) &:= f(-x) & \widetilde{u}(f) &:= u(\widetilde{f}) & &\text{(Reflexion)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

a) $\mathcal{F}\big(\tau^y(u)\big) = e^{-2\pi i y\cdot x}\mathcal{F}(u)$;

b) $\mathcal{F}\big(e^{2\pi i x\cdot y} u\big) = \tau^y\big(\mathcal{F}(u)\big)$;

c) $\mathcal{F}\big(\delta^a(u)\big) = a^{-d}\delta^{1/a}\big(\mathcal{F}(u)\big)$;

d) $\mathcal{F}(\widetilde{u}) = \widetilde{\mathcal{F}(u)}$.