KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 29. April 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
2. Übungsblatt

Aufgabe 4 (Distributionen mit Punktträgern)

Für eine temperierte Distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definieren wir

$$\mathcal{A}(u) := \{A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen} : u(f) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \operatorname{supp}(f) \subseteq A\}$$

und den *Träger* von u durch

$$\operatorname{supp}(u) := \bigcap_{A \in \mathcal{A}(u)} A^C.$$

Seien $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$ und $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie:

a) Sei $\operatorname{supp}(u) = \{x_0\}$ und $|u(f)| \leq C\|f\|_N$ für ein $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$. Hat $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die Eigenschaft $D^\alpha f(x_0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq N$, so folgt $u(f) = 0$.

b) Gilt $\operatorname{supp}(u) = \{x_0\}$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq N} \subseteq \mathbb{C}$, sodass

$$u = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}.$$

c) Sei $\operatorname{supp}(\widehat{u}) = \{\xi_0\}$. Dann ist u eine endliche Linearkombination von Funktionen

$$\xi \mapsto (-2\pi i \xi)^\alpha e^{2\pi i \xi \cdot \xi_0}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

d) Gilt

$$\Delta(u) := \sum_{j=1}^d \partial_j^2 u = 0,$$

so ist u ein Polynom.

Aufgabe 5 (Hilberttransformation)

Zeigen Sie:

a) Der Grenzwert

$$\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

existiert für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

b) Die Abbildung

$$\operatorname{pv}(\tfrac{1}{x}) \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \qquad f \mapsto \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

definiert eine temperierte Distribution.

— bitte wenden —

Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ definieren wir die *Hilberttransformation* durch

$$H(f) := \mathcal{F}^{-1}\big(\tfrac{\text{sign}}{i}\widehat{f}\big).$$

Zeigen Sie:

c) H ist eine unitäre Abbildung auf $L^2(\mathbb{R})$ mit $H^{-1} = -H$.

d) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$H(f) = \tfrac{1}{\pi}\text{pv}(\tfrac{1}{x}) * f.$$

e) $\widehat{\text{pv}(\tfrac{1}{x})} = \frac{\pi}{i}\text{sign}.$

Aufgabe 6 (Sobolev-Räume)

a) Zeigen Sie, dass $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ für $s \geq 0$.

b) Zeigen Sie:

1) $x \mapsto e^{-2\pi|x|} \in H^s(\mathbb{R}) \iff s < \frac{3}{2}$;
2) $\mathbb{1}_{[-a,a]} \in H^s(\mathbb{R})$ für $a > 0 \iff s < \frac{1}{2}$;
3) $\mathbb{1}_{[-a,a]^d} \in H^s(\mathbb{R}^d)$ für $a > 0 \iff s < \frac{1}{2}$.

c) Seien $-\infty < s_1 < s < s_2 < \infty$ und

$$s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \qquad \text{für ein } \theta \in (0,1).$$

Zeigen Sie, dass dann ein $C > 0$ existiert, sodass für alle $\varepsilon > 0$ und $f \in H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ folgende Ungleichungen gelten:

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^{1-\theta}\|f\|_{H^{s_2}}^{\theta} \leq \varepsilon\|f\|_{H^{s_2}} + C\varepsilon^{-\frac{\theta}{1-\theta}}\|f\|_{H^{s_1}}.$$