KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 6. Mai 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
3. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Produkt-Abschätzungen)

a) Sei $s \in \mathbb{N}_0$, $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\varphi \cdot f \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

b) Sei $s > \frac{d}{2}$ und $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \cdot g \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 8 (Fraktionelle Potenzen des Laplace-Operators)

Seien $\alpha, \beta \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $(-\Delta)_t^\alpha$ und $(I-\Delta)_t^\alpha$ sind abgeschlossene Operatoren auf $H^t(\mathbb{R}^d)$.

b) $(-\Delta)_t^\alpha \colon H^{t+2\alpha}(\mathbb{R}^d) \to H^t(\mathbb{R}^d)$ ist stetig und $(I-\Delta)_t^\alpha \colon H^{t+2\alpha}(\mathbb{R}^d) \to H^t(\mathbb{R}^d)$ ist ein Isomorphismus.

c) $(-\Delta)_t^\alpha(-\Delta)_t^\beta = (-\Delta)_t^{\alpha+\beta}$.

d) Für $d = 1$ gilt $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})^{1/2} = H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, wobei H die Hilberttransformation bezeichne.

Aufgabe 9 (Elliptische Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten)

Für die Koeffizienten $(a_{k\ell})_{k\ell=1}^d \subseteq \mathbb{R}$ existiere ein $C > 0$, sodass

$$\sum_{k,\ell=1}^d a_{k\ell}\xi_k\overline{\xi_\ell} \geq C|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{C}^d.$$

Davon ausgehend definieren wir $a(\xi) := -4\pi^2 \sum_{k,\ell=1}^d a_{k\ell}\xi_k\xi_\ell$ für $\xi \in \mathbb{R}^d$ und den elliptischen Operator $A \colon D(A) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ durch

$$D(A) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \colon a(\nabla)f \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \quad \text{und}$$
$$Af := \sum_{k,\ell=1}^d a_{k\ell}\partial_{x_k}\partial_{x_\ell}f, \quad \text{für } f \in D(A).$$

a) Zeigen Sie, dass $D(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$.

b) Sei $\Omega := \overline{\{a(\xi) \colon \xi \in \mathbb{R}^d\}}$. Bestimmen Sie für A einen Funktionalkalkül $\Phi_A \colon \mathcal{B}_b(\Omega) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$, sodass die folgenden Eigenschaften gelten:

i) Φ_A ist linear und multiplikativ.

ii) $\|\Phi_A(\varphi)\| = \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$ für $\varphi \in \mathcal{B}_b(\Omega)$.

— bitte wenden —

iii) Sei $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}_b(\Omega)$ gleichmäßig beschränkt mit $\varphi_n \to \varphi$ punktweise f.ü. für $n \to \infty$ und ein $\varphi \in \mathcal{B}_b(\Omega)$. Dann gilt auch

$$\Phi_A(\varphi_n) f \to \Phi_A(\varphi) f \qquad \text{für } n \to \infty \text{ und alle } f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

iv) $\Phi_A(\varphi)^* = \Phi_A(\overline{\varphi})$, und $\Phi_A(\varphi)$ ist selbstadjungiert genau dann, wenn φ reellwertig ist.

v) Für $\mu \notin \Omega$ und $r_\mu(\lambda) := (\mu - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \Omega$, gilt $\Phi_A(r_\mu) = (\mu - A)^{-1}$.