KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 13. Mai 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 10 (Invarianz unter Skalierung)

Wir betrachten die Gleichungen

$$\partial_t u(t,x) = P(\nabla)u(t,x), \tag{1}$$
$$\partial_{tt} v(t,x) = P(\nabla)v(t,x), \tag{2}$$

wobei $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ein homogenes Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$ sei. Zeigen Sie für $\lambda > 0$ die folgenden Eigenschaften:

a) u löst (1) genau dann, wenn $u_\lambda\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $u_\lambda(t,x) := u\big(\frac{1}{\lambda^k}t, \frac{1}{\lambda}x\big)$, eine Lösung von (1) ist.

b) v löst (2) genau dann, wenn $v_\lambda\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $v_\lambda(t,x) := v\big(\frac{1}{\lambda^{k/2}}t, \frac{1}{\lambda}x\big)$, eine Lösung von (2) ist.

Aufgabe 11 (Schrödinger vs. Wellen vs. Klein-Gordon)

Wir betrachten die linearen Gleichungen

$$i\partial_t u(t,x) + \tfrac{\hbar}{2m}\Delta u(t,x) = 0, \qquad \text{(Schrödinger)} \tag{3}$$
$$-\tfrac{1}{c^2}\partial_{tt} u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0, \qquad \text{(Wellen)} \tag{4}$$
$$-\tfrac{1}{c^2}\partial_{tt} u(t,x) + \Delta u(t,x) = \tfrac{m^2c^2}{\hbar^2}u(t,x). \qquad \text{(Klein-Gordon)} \tag{5}$$

Zeigen Sie:

a) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ und $v \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ definiert durch $v(t,x) := e^{\frac{imc^2t}{\hbar}}u(t,x)$. Dann ist u genau dann eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung (5), falls v eine Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$i\partial_t v(t,x) + \tfrac{\hbar}{2m}\Delta v(t,x) = \tfrac{\hbar}{2mc^2}\partial_{tt} v(t,x).$$

b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ und $v \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d+1})$ definiert durch

$$v(t,x,x_{d+1}) := e^{\frac{imcx_{d+1}}{\hbar}}u(t,x).$$

Dann ist v eine Lösung der $d+1$-dimensionalen Wellengleichung (4) genau dann, wenn u die d-dimensionale Klein-Gordon-Gleichung (5) löst.

c) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ und $v \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d+1})$ definiert durch

$$v(t,x,x_{d+1}) := \tfrac{\hbar}{m}e^{-i\sqrt{\frac{m}{\hbar}}(ct+x_{d+1})}u\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{m}{\hbar}}(ct-x_{d+1}), x\Big).$$

Dann löst v die $d+1$-dimensionale Wellengleichung (4) genau dann, wenn u die d-dimensionale Schrödinger-Gleichung (3) löst.

Aufgabe 12 (Wärmeleitungsgleichung)

Wir betrachten für $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) + f(t,x), \qquad u(0,x) = u_0(x). \tag{6}$$

a) Berechnen Sie für $t > 0$ die Fouriertransformation der Funktion $g_t \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

b) Geben Sie für $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (6) an.

c) Wir definieren die Operatorfamilie $(S(t))_{t\geq 0}$ durch $S(0) := I$ und

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,\mathrm{d}y = (g_t * f)(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),\, x \in \mathbb{R}^d,\, t > 0.$$

Zeigen Sie:

i) $S(t+s) = S(t) \cdot S(s)$ für $t, s \geq 0$;

ii) $\|S(t)\|_{L^2 \to L^2} = 1$ für $t \geq 0$;

iii) $\lim_{t\to 0} S(t)f = f$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$;

iv) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(S(h) - I)f = \Delta f$ für $f \in H^2(\mathbb{R}^d)$.