KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 20. Mai 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
5. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Lösungsformel für die Klein-Gordon-Gleichung)

Wir betrachten für $m > 0$ die Gleichung

$$\partial_{tt} u(t,x) = \Delta u(t,x) - mu(t,x) + f(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x),\, \partial_t u(0,x) = u_1(x). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$, $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ und $V(t) := e^{it(m-\Delta)^{1/2}}$ die Lösung von (1) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{1}{2} V(t)\big(u_0(x) - i(m-\Delta)^{-1/2} u_1(x)\big) + \tfrac{1}{2} V(-t)\big(u_0(x) + i(m-\Delta)^{-1/2} u_1(x)\big) \\ &\quad + \tfrac{1}{2i} \int_0^t \big(V(t-s) - V(s-t)\big)(m-\Delta)^{-1/2} f(s,x)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Aufgabe 14 (C_0-Halbgruppen)

Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Erzeuger A. Zeigen Sie:

a) Es existieren Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, sodass

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

b) $T(t)R(\lambda, A) = R(\lambda, A)T(t)$ für jedes $t \geq 0$ und $\lambda \in \rho(A)$.

c) Für $x \in D(A)$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

d) Für $x \in X$ ist $\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in D(A)$ und

$$A \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = T(t)x - x.$$

e) A ist abgeschlossen und $\overline{D(A)} = X$.

Aufgabe 15 (Sine-Gordon-Gleichung)

Wir betrachten für $m > 0$ die *sine-Gordon-Gleichung*

$$\partial_{tt} u(t,x) - \Delta u(t,x) + mu(t,x) = \sin(\operatorname{Re} u(t,x)), \quad u(0,x) = u_0(x),\, \partial_t u(0,x) = u_1(x). \tag{2}$$

Beweisen Sie mithilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass (2) für jedes $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ und $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ genau eine milde Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$ besitzt.