KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 27. Mai 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 16 (Interpolationssatz von Marcinkiewicz für spezielle Operatoren)

Seien $1 \le p_0 < p < \infty$ und $T\colon L^{p_0}(\Omega,\mu) + L^\infty(\Omega,\mu) \to L^0(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mu})$ ein sublinearer Operator, der die Voraussetzungen des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz erfüllt sowie $|Tf| \le T|f|$ für $f \in L^{p_0}(\Omega,\mu) + L^\infty(\Omega,\mu)$. Beweisen Sie, dass T ein Element von $\mathcal{B}(L^p(\Omega,\mu), L^p(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mu}))$ ist mit Operatornorm

$$\|T\| \le \Big(\frac{p^{p+1}B(p-p_0,p_0+1)}{p_0^{p_0}(p-p_0)^{p-p_0}}\Big)^{1/p} A_0^{p_0/p} A_1^{1-p_0/p},$$

wobei $B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ die Beta-Funktion bezeichne.

Hinweis: Beweis des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz.

Aufgabe 17 (Verallgemeinerung der Hausdorff-Young-Ungleichung)

Sei $w\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ eine *Gewichtsfunktion* (d.h. w ist positiv und messbar). Dann definieren wir $L^p(w) := L^p(\mathbb{R}^d, w\,\mathrm{d}x)$ mit Norm

$$\|f\|_{L^p(w)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}, \qquad p \in [1,\infty).$$

Sei nun $p \in [1,2]$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(|\xi|^{-d(2-p)})} \le C_p \|f\|_{L^p}$$

für eine Konstante $C_p > 0$.

Hinweis: Interpolationssatz von Marcinkiewicz.

Aufgabe 18 (Hardy-Ungleichungen)

a) Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ eine multiplikative Gruppe mit Haar-Maß μ. Für $f, g \in L^1(G,\mu)$ definieren wir die *Faltung* $f * g$ durch

$$(f*g)(x) := \int_G f(y) g\big(\tfrac{x}{y}\big)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Sei $p \in [1,\infty]$. Zeigen Sie für $f \in L^p(G,\mu)$ und $g \in L^1(G,\mu)$ die Ungleichung

$$\|f*g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}.$$

— bitte wenden —

b) Seien $0 < b < \infty$ und $p \in [1, \infty)$. Zeigen Sie für passend gewählte $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$:

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\Big)^p x^{-b-1}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \le \frac{p}{b}\Big(\int_0^\infty |f(t)|^p t^{p-b-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p},$$
$$\Big(\int_0^\infty \Big(\int_x^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t\Big)^p x^{b-1}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \le \frac{p}{b}\Big(\int_0^\infty |f(t)|^p t^{p+b-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

Hinweis: Man betrachte auf $((0,\infty), \frac{\mathrm{d}t}{t})$ die Faltung der Funktion $x \mapsto |f(x)|x^{1-b/p}$ mit $x \mapsto x^{-b/p}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ und der Funktion $x \mapsto |f(x)|x^{1+b/p}$ mit $x \mapsto x^{b/p}\mathbb{1}_{(0,1]}(x)$.