KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 3. Juni 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
7. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Riesz-Potentiale)

Sei $\alpha \in (0,d)$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir das *Riesz-Potential* durch

$$(I_\alpha f)(x) := \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{-d+\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y$$

mit $\gamma(\alpha) := \pi^{d/2} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})}$.

a) Zeigen Sie, dass die (distributionelle) Fouriertransformation der Funktion $x \mapsto |x|^{-d+\alpha}$ gegeben ist durch $x \mapsto \gamma(\alpha)(2\pi|x|)^{-\alpha}$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{-d+\alpha} \widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(\alpha)(2\pi|x|)^{-\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

b) Bestimmen Sie die (distributionelle) Fouriertransformation von $I_\alpha f$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 20 (Fourier-Multiplikatoren)

Sei $p \in (1,\infty)$. Dann nennen wir eine Funktion $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ einen *Fourier-Multiplikator für $L^p(\mathbb{R}^d)$*, falls der lineare Operator

$$T_m f := \mathcal{F}^{-1}(m\widehat{f}), \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d),$$

eine stetige Fortsetzung auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ besitzt.

a) Sei $m \in C^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0, d.h.

$$m(\lambda\xi) = m(\xi) \qquad \text{für } \lambda > 0 \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass m für jedes $p \in (1,\infty)$ ein Fourier-Multiplikator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist.

b) Seien $N \in \mathbb{N}$ und $m_1, m_2 \in C^N(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, sodass

$$|D^\alpha m_j(\xi)| \le C_j |\xi|^{s_j - |\alpha|} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, |\alpha| \le N$$

für $C_j > 0$ und $s_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$. Beweisen Sie, dass eine Konstante $C_0 > 0$ existiert, sodass für $m := m_1 \cdot m_2$ die folgende Bedingung erfüllt ist

$$|D^\alpha m(\xi)| \le C_0 |\xi|^{s_1+s_2-|\alpha|} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, |\alpha| \le N.$$

c) Sei $m \in C^{[\frac{d}{2}]+1}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ reellwertig mit

$$|D^\alpha m(\xi)| \le C|\xi|^{-|\alpha|} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, |\alpha| \le [\tfrac{d}{2}] + 1.$$

Zeigen Sie, dass $e^{im(\cdot)}$ für jedes $p \in (1,\infty)$ ein Fourier-Multiplikator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 21 (Warum Würfel Multiplikatoren sind)

a) Zeigen Sie, dass die Hilberttransformation

$$Hf := \mathcal{F}^{-1}\big(\tfrac{\text{sign}}{i}\widehat{f}\big), \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}),$$

für jedes $p \in (1,\infty)$ ein stetiger Operator auf $L^p(\mathbb{R})$ ist.

b) Folgern Sie, dass $\mathbb{1}_{(0,\infty)}$ und $\mathbb{1}_{(-\infty,0)}$ für jedes $p \in (1,\infty)$ Fourier-Multiplikatoren auf $L^p(\mathbb{R})$ sind.

c) Für $a \in \mathbb{R}$ bestimme man die Operatoren, die durch die Fourier-Multiplikatoren $\mathbb{1}_{(a,\infty)}$ und $\mathbb{1}_{(-\infty,a)}$ gegeben sind.

d) Sei $(I_j)_{j=1}^d$ eine Folge von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$m(x) := \prod_{j=1}^d \mathbb{1}_{I_j}(x_j), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

für jedes $p \in (1,\infty)$ ein Fourier-Multiplikator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist.