KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

SS 2015
10. Juni 2015

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
8. Übungsblatt

Aufgabe 22 (Littlewood-Paley, kontinuierliche Version)

Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\varphi = \{\xi \in \mathbb{R}^d\colon \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-k}\xi) = 1$ für $\xi \neq 0$.

a) Für $t > 0$ definieren wir $\phi_t(\xi) := \frac{1}{\ln 2}\varphi(t^{-1}\xi)$. Zeigen Sie:

   i) $\int_0^\infty \phi_t(\xi)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1$ für $\xi \neq 0$;

   ii) $\int_0^\infty \big(\check{\phi}_t * f\big)(x)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = f(x)$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

b) Seien $p \in (1,\infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie:

$$\Big\|\Big(\int_0^\infty \big|\check{\phi}_t * f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p} \eqsim_{d,p} \|f\|_{L^p}.$$

Aufgabe 23 (Wurzel des Laplace in L^p)

Seien $p \in (1,\infty)$ und $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Beweisen Sie die Ungleichungen

$$\big\|(-\Delta)^{1/2} f\big\|_{L^p} \eqsim_{d,p} \Big\|\Big(\sum_{k=1}^d |\partial_{x_k} f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p}.$$

Aufgabe 24 (Sobolev-Räume)

Seien $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$ und $p' = \frac{p}{p-1} \in (1,\infty)$.

a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definieren wir $J_\alpha(g) := \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\cdot|^2)^{\alpha/2}\widehat{g}\big)$. Zeigen Sie, dass

$$I_{s,p}(u)(f) := \int_{\mathbb{R}^d} J_s(f) J_{-s}(u)\,\mathrm{d}x, \qquad f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d),\ u \in W^{-s,p'}(\mathbb{R}^d),$$

einen isometrischen Isomorphismus $I_{s,p}\colon W^{-s,p'}(\mathbb{R}^d) \to (W^{s,p}(\mathbb{R}^d))'$ definiert.

b) Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\varphi = \{\xi \in \mathbb{R}^d\colon |\xi| \le 2\}$, $\varphi = 1$ auf $\{\xi \in \mathbb{R}^d\colon |\xi| \le 1\}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k(\xi) = \varphi(\xi) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(\xi) = 1$ für $\xi \neq 0$, wobei $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi) - \varphi(2^{-k+1}\xi)$ für $k \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie in diesem Fall die folgende Normäquivalenz:

$$\|f\|_{W^{s,p}} \eqsim \|\varphi(D) f\|_{L^p} + \Big\|\Big(\int_0^1 \big|t^{-s}\varphi_0(2tD) f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p}, \quad f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d).$$