KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 17. Juni 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

# Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
## 9. Übungsblatt

**Generalvoraussetzungen:** Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $|\psi| \le 1$, $\psi = 1$ auf $\{|\xi| \le \frac{1}{\lambda}\}$ und $\operatorname{supp}\psi = \{|\xi| \le \lambda\}$ für ein $\lambda \in (1, \sqrt{2})$. Dann definieren wir

$$\varphi(\xi) := \psi(\tfrac{1}{2}\xi) - \psi(\xi), \quad \varphi_{-1}(\xi) := \psi(\xi), \quad \varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi), \quad j \ge 0,\ \xi \in \mathbb{R}^d,$$

sowie für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\Delta_j u := \varphi_j(D)u = \check{\varphi}_j * u \quad \text{für } j \ge -1, \qquad \Delta_j u := 0 \quad \text{für } j < -1.$$

Dann gilt $\sum_{j\ge -1} \varphi_j(\xi) = 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und daher $u = \sum_{j \ge -1} \Delta_j u$.

Für $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$ definieren wir nun die *Besov-Räume* durch

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \colon \|u\|_{B^s_{p,q}} := \left\| \left(2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p}\right)_{j\ge -1} \right\|_{\ell^q} < \infty \right\}.$$

### Aufgabe 25 (Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)

Seien $0 < R_1 < R_2 < \infty$ und $(u_j)_{j\ge 1} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$, sodass

$$\operatorname{supp}\widehat{u}_j \subset \{2^j R_1 \le |\xi| \le 2^j R_2\}.$$

Zeigen Sie: Falls $2^{-jM}\|u_j\|_{L^\infty} \le C$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und ein $M \ge 0$, $C > 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{j \ge 1} u_j$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

### Aufgabe 26 (Abschätzungen in Besov-Räumen)

a) Seien $R_0, R_1, R_2 > 0$ mit $R_1 < R_2$, $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$. Seien $(u_j)_{j \ge -1} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, sodass

$$\operatorname{supp}\widehat{u}_{-1} \subset \{|\xi| \le R_0\}, \qquad \operatorname{supp}\widehat{u}_j \subset \{2^j R_1 \le |\xi| \le 2^j R_2\}, \quad j \ge 0,$$

und

$$\left\| \left(2^{js}\|u_j\|_{L^p}\right)_{j \ge -1} \right\|_{\ell^q} < \infty.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall $u := \sum_{j \ge -1} u_j \in S'(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} \le C_s \left\| \left(2^{js}\|u_j\|_{L^p}\right)_{j \ge -1} \right\|_{\ell^q}$$

für eine Konstante $C_s > 0$.

b) Seien $R_0 > 0$, $s > 0$ und $p, q \in [1, \infty]$. Seien $(u_j)_{j \ge -1} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, sodass

$$\operatorname{supp}\widehat{u}_j \subset \{|\xi| \le 2^j R_0\}, \quad j \ge -1, \quad \text{und} \quad \left\| \left(2^{js}\|u_j\|_{L^p}\right)_{j \ge -1} \right\|_{\ell^q} < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann $u := \sum_{j \ge -1} u_j \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} \le C_s \left\| \left(2^{js}\|u_j\|_{L^p}\right)_{j \ge -1} \right\|_{\ell^q}$$

für eine Konstante $C_s > 0$.

**Aufgabe 27 (Para-Produkte)**

Für $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ können wir deren Produkt auf die folgende Weise zerlegen:

$$uv = \Big(\sum_{i\geq -1} \Delta_i u\Big)\Big(\sum_{j\geq -1} \Delta_j v\Big) = \Pi_-(u,v) + \Pi_+(u,v) + \Pi_0(u,v),$$

wobei

$$\Pi_-(u,v) := \sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j=-1}^{i-2} \Delta_j u\Big)\Delta_i v, \qquad \Pi_+(u,v) := \Pi_-(v,u),$$
$$\Pi_0(u,v) := \sum_{i\geq -1} \Delta_i u\big(\Delta_{i-1}v + \Delta_i v + \Delta_{i+1}v\big).$$

a) Seien $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1,\infty]$. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C_1 > 0$ existiert, sodass

$$\big\|\Pi_-(u,v)\big\|_{B^s_{p,q}} \leq C_1 \|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,q}}, \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}^d), v \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d).$$

b) Seien $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1,\infty]$ mit

$$\frac{1}{p} := \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1, \quad \frac{1}{q} := \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leq 1, \quad s := s_1 + s_2 > 0.$$

Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C_2 > 0$ existiert mit

$$\big\|\Pi_0(u,v)\big\|_{B^s_{p,q}} \leq C_2 \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,q_1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,q_2}}, \quad u \in B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d), v \in B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d).$$

c) Folgern Sie, dass für $s > 0$ und $p, q \in [1,\infty]$ eine Konstante $C_3 > 0$ existiert mit

$$\|uv\|_{B^s_{p,q}} \leq C_3\big(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,q}} + \|u\|_{B^s_{p,q}}\|v\|_{L^\infty}\big), \quad u, v \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Insbesondere zeige man für $s > \frac{d}{p}$ die Abschätzung

$$\|uv\|_{B^s_{p,q}} \leq C\|u\|_{B^s_{p,q}}\|v\|_{B^s_{p,q}}, \quad u, v \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d),$$

für eine Konstante $C > 0$.