KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 24. Juni 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
10. Übungsblatt

Aufgabe 28 (Lebesgue-Bochner-Räume)

Seien $(A, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und E ein Banachraum. Eine Funktion $f\colon A \to E$ heißt *stark μ-messbar*, falls f durch einfache Funktionen μ-fast überall punktweise approximiert werden kann. Für $p \in [1, \infty)$ definieren wir dann den Raum $L^p(A; E)$ als die Menge (aller Äquivalenzklassen) von stark μ-messbaren Funktionen $f\colon A \to E$ mit

$$\int_A \|f(a)\|_E^p \,\mathrm{d}\mu(a) < \infty.$$

Dann ist $L^p(A; E)$ bezüglich $\|f\|_{L^p(A;E)} := \left(\int_A \|f(a)\|_E^p \,\mathrm{d}\mu(a)\right)^{1/p}$ ein Banachraum.

a) Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi(g)(f) := \int_A \big\langle f(a), g(a) \big\rangle \,\mathrm{d}\mu(a), \qquad f \in L^p(A; E),\ g \in L^q(A; E'),$$

eine isometrische Einbettung $\Phi\colon L^q(A; E') \to (L^p(A; E))'$ definiert.

b) Seien nun $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(A; E)$, $f' \in L^p(A; E')$. Zeigen Sie

1) $$\|f\|_{L^p(A;E)} = \sup_{\|g'\|_{L^q(A;E')}=1} \Big| \int_A \big\langle f(a), g'(a) \big\rangle \,\mathrm{d}\mu(a) \Big|,$$

2) $$\|f'\|_{L^p(A;E')} = \sup_{\|g\|_{L^q(A;E)}=1} \Big| \int_A \big\langle g(a), f'(a) \big\rangle \,\mathrm{d}\mu(a) \Big|.$$

Aufgabe 29 (Dichtheit in Lebesgue-Bochner-Räumen)

Seien $p \in [1, \infty)$, E ein Banachraum und $D \subseteq E$ dicht in E. Zeigen Sie, dass die Menge $C_c^\infty(\mathbb{R}^d; D)$ in $L^p(\mathbb{R}^d; E)$ dicht liegt.

Aufgabe 30 (Ebene Wellen)

Seien $k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 1$. Lösen Sie mithilfe des Separationsansatzes

$$v(t, x) := \phi(t) e^{ik\cdot x}, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R},$$

für ein $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ die nichtlineare Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} i\partial_t u(t, x) &= -\Delta u(t, x) + \mu |u(t, x)|^{\alpha-1} u(t, x), && x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= a e^{ik\cdot x}, && x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$