KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 1. Juli 2015
Prof. Dr. Lutz Weis
Markus Antoni

Nichtlineare Schrödinger- und Wellengleichungen
11. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Abschätzungen für die Nichtlinearität)

Seien $J = [-b, b]$ für ein $b > 0$, $\mu \in \{-1, 1\}$, $p = 1 + \alpha \in (2, 1 + \frac{d+2}{(d-2)_+})$ und $q \in (2, \infty)$ mit $\frac{2}{q} = \frac{d}{2} - \frac{d}{p}$. Seien außerdem $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und $u \in L^\infty(J; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^q(J; W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$. Zeigen Sie in diesem Fall die folgenden Abschätzungen für die Nichtlinearität $F(u) = -i\mu|u|^{\alpha-1}u$:

a) $\big\|\nabla F(\phi)\big\|_{L^{p'}} \le c\|\phi\|_{L^p}^{\alpha-1}\big\||\nabla\phi|\big\|_{L^p}$,

b) $\big\|\nabla F(u)\big\|_{L^{q'}(J;L^{p'}(\mathbb{R}^d))} \le cr^{\alpha-1}b^{1/q'-1/q}\big\||\nabla u|\big\|_{L^q(J;L^p(\mathbb{R}^d))}$,

c) $\big\|F(u)\big\|_{L^{q'}(J;W^{1,p'}(\mathbb{R}^d))} \le cr^{\alpha-1}b^{1/q'-1/q}\|u\|_{L^q(J;W^{1,p}(\mathbb{R}^d))}$,

wobei $r := \|u\|_{L^\infty(J;H^1(\mathbb{R}^d))}$ und $c > 0$ eine Konstante ist, die nur von $\alpha \in (1, \frac{d+2}{(d-2)_+})$ und d abhängt.

Aufgabe 32 (Endpunkt-Fall)

Seien $d \ge 3$, $\alpha = \frac{d+2}{d-2}$ und $\mu \in \{-1, 1\}$. Zeigen Sie, dass ein Radius $R > 0$ existiert, so dass die nichtlineare Schrödingergleichung

$$u'(t) = i\Delta u(t) - i\mu|u(t)|^{\alpha-1}u(t), \qquad u(0) = u_0,$$

eine H^1-Lösung in $L^\infty(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}; W^{1,\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d))$ besitzt für jedes $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\|u_0\|_{H^1} \le R$.

Hinweis: Benutzen Sie Stichartz-Abschätzungen für den Endpunkt-Fall $(q, p) = (2, \frac{2d}{d-2})$.

Aufgabe 33 (Blow-up)

Seien $1 + \frac{4}{d} \le \alpha < \frac{d+2}{(d-2)_+}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ mit $|\cdot|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $E(u_0) < 0$. Sei u die Lösung der fokusierenden nichtlinearen Schrödingergleichung

$$u'(t) = i\Delta u(t) - i\mu|u(t)|^{\alpha-1}u(t), \qquad u(0) = u_0,$$

mit $\mu = -1$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall das maximale Existenzintervall von u beschränkt ist.