Aufgabe 15 b) Sei nun $(B_t)_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung und $F \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{m\times n})$. Zeigen Sie, dass

$$Y_t := \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T],$$

m-dimensional normalverteilt ist, und bestimmen Sie die zugehörige Kovarianzmatrix.

Wir zeigen zunächst zwei Hilfsbehauptungen:

Behauptung 1: Für eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$X \text{ ist } n\text{-dim. normalverteilt} \iff a^\top X \text{ ist 1-dim. normalverteilt für alle } a \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Ist X $N(m,C)$-verteilt, für $m \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, so folgt

$$\varphi_{a^\top X}(t) = \varphi_X(ta) = \exp(ia^\top mt)\exp\big(-\tfrac{1}{2}(a^\top Ca)t^2\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

d.h. $a^\top X$ ist $N(a^\top m, a^\top Ca)$-verteilt (siehe auch Aufgabe 3c)).

Ist umgekehrt $a^\top X$ 1-dimensional normalverteilt für alle $a \in \mathbb{R}^n$, so folgt mit $m := \mathbb{E}X$ und $C := \mathrm{Cov}(X)$

$$\mathbb{E}(a^\top X) = a^\top m \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(a^\top X) = a^\top Ca,$$

und damit

$$\varphi_X(t) = \varphi_{t^\top X}(1) = \exp(it^\top m)\exp(-\tfrac{1}{2}t^\top Ct), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Also ist X $N(m,C)$-verteilt.

Behauptung 2: Ein Prozess $(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung, wenn die Komponenten $(B_t^{(1)})_{t\geq 0}, \ldots, (B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ unabhängige 1-dimensionale Brown'sche Bewegungen sind.

Beweis: Sind die Komponenten unabhängige 1-dimensionale Brown'sche Bewegungen, so wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ die charakterisierenden Eigenschaften einer n-dimensionalen Brown'schen Bewegung erfüllt.

Sei nun umgekehrt $(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung. Nach Aufgabe 9 b) ist dann jede Komponente eine 1-dimensionale Brown'sche Bewegung. D.h. es bleibt zu zeigen, dass die Prozesse $(B_t^{(1)})_{t\geq 0}, \ldots, (B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ unabhängig sind.

Da für $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ die Zufallsvariablen

$$B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_N} - B_{t_{N-1}}$$

unabhängig und n-dimensional normalverteilt sind, ist auch

$$X := (B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_N} - B_{t_{N-1}})$$

nN-dimensional normalverteilt.

Sei nun $(\lambda_k)_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N, \lambda_2 + \cdots + \lambda_N, \ldots, \lambda_N)^\top X = \sum_{m=1}^N \Big(\sum_{k=m}^N \lambda_k^\top\Big)(B_{t_m} - B_{t_{m-1}}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^\top B_{t_k}$$
$$= (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)^\top (B_{t_1}, \ldots, B_{t_N}).$$

Also ist nach Beh. 1 auch $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_N})$ nN-dimensional normalverteilt.

Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ wählen wir nun $0 \le t_1^{(j)} < \ldots < t_{N_j}^{(j)}$ für $N_j \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist nach Obigem

$$(B^{(1)}_{t_1^{(1)}}, \ldots, B^{(1)}_{t_{N_1}^{(1)}}, \ldots\ldots, B^{(n)}_{t_1^{(n)}}, \ldots, B^{(n)}_{t_{N_n}^{(n)}})$$

$\sum_{j=1}^n N_j$-dimensional normalverteilt. Für $j \neq k$ und $t_m^{(j)} \le t_p^{(k)}$ gilt nun wegen der Unabhängigkeit von $B_{t_m^{(j)}}$ und $B_{t_p^{(k)}} - B_{t_m^{(j)}}$, dass auch $B^{(j)}_{t_m^{(j)}}$ und $B^{(k)}_{t_p^{(k)}} - B^{(k)}_{t_m^{(j)}}$ unabhängig sind. Da schließlich noch $B_t \sim N(0, tI)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(B^{(j)}_{t_m^{(j)}}, B^{(k)}_{t_p^{(k)}}) &= \mathbb{E}\big(B^{(j)}_{t_m^{(j)}}(B^{(k)}_{t_p^{(k)}} - B^{(k)}_{t_m^{(j)}})\big) + \mathbb{E}\big(B^{(j)}_{t_m^{(j)}} B^{(k)}_{t_m^{(j)}}\big)\\ &= \mathbb{E}B^{(j)}_{t_m^{(j)}}\mathbb{E}\big(B^{(k)}_{t_p^{(k)}} - B^{(k)}_{t_m^{(j)}}\big) + \mathrm{Cov}(B^{(j)}_{t_m^{(j)}}, B^{(k)}_{t_m^{(j)}}) = 0.\end{aligned}$$

Mit Aufgabe 3 e) (oder eher einer vektorwertigen Variante davon) folgt nun, dass die Zufallsvektoren

$$(B^{(1)}_{t_k^{(1)}})_{k=1}^{N_1}, \ldots, (B^{(n)}_{t_k^{(n)}})_{k=1}^{N_n}$$

stochastisch unabhängig sind, d.h. die Prozesse $B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}$ sind stochastisch unabhängig.

Kommen wir zurück zur Lösung von Aufgabe 15 b).

Lösung: Beachte dass nach Beh. 2 und der Definition des Wiener-Integrals die Zufallsvariablen

$$\int_0^t g_1(s)\,\mathrm{d}B_s^{(1)}, \ldots, \int_0^t g_n(s)\,\mathrm{d}B_s^{(n)}$$

für beliebige L^2-Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ stochastisch unabhängig sind. Wegen

$$\int_0^t F(s)\,\mathrm{d}B_s = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \int_0^t F_{1k}(s)\,\mathrm{d}B_s^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \int_0^t F_{mk}(s)\,\mathrm{d}B_s^{(k)} \end{pmatrix}$$

erhalten wir für jedes $a \in \mathbb{R}^m$

$$a^\top \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}B_s = \sum_{k=1}^n \int_0^t a^\top F_{\cdot k}(s)\,\mathrm{d}B_s^{(k)}.$$

Nach Aufgabenteil a) und obiger Bemerkung ist die rechte Seite aber gerade die Summe von n unabhängigen, 1-dimensional normalverteilten Zufallsvariablen, also selbst 1-dimensional normalverteilt. Nach Beh. 1 ist damit $\int_0^t F(s)\,\mathrm{d}B_s$ m-dimensional normalverteilt. Außerdem gilt nach a)

$$\mathbb{E}\int_0^t F(s)\,\mathrm{d}B_s = 0,$$

und mit der Unabhängigkeit und der Itô-Isometrie erhalten wir schließlich noch

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y_{t,\ell}, Y_{t,\tilde{\ell}}) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\tilde{k}=1}^{n} \Big\langle \int_0^t F_{lk}(s)\,\mathrm{d}B_s^{(k)}, \int_0^t F_{\tilde{\ell}\tilde{k}}(s)\,\mathrm{d}B_s^{(\tilde{k})} \Big\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big\langle \int_0^t F_{\ell k}(s)\,\mathrm{d}B_s^{(k)}, \int_0^t F_{\tilde{\ell}k}(s)\,\mathrm{d}B_s^{(k)} \Big\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t F_{\ell k}(s) F_{\tilde{\ell}k}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t (F(s)F(s)^\top)_{\ell\tilde{\ell}}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

D.h. $\operatorname{Cov}(Y_t) = \int_0^t F(s)F(s)^\top\,\mathrm{d}s$.