Aufgabe 3 e) Ist X $N(m,C)$-verteilt, so gilt

$$X_1,\dots,X_n \text{ sind stochastisch unabhängig } \iff c_{jk}=0 \text{ für alle } j\neq k.$$

Lösung: Sind $X_1,\dots,X_n$ stochastisch unabhängig, so folgt für $j\neq k$ mit Aufgabenteil d)

$$c_{jk}=\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=\mathbb{E}X_jX_k-\mathbb{E}X_j\mathbb{E}X_k=\mathbb{E}X_j\mathbb{E}X_k-\mathbb{E}X_j\mathbb{E}X_k=0.$$

Gilt umgekehrt $c_{jk}=0$ für $j\neq k$, so ist C eine Diagonalmatrix und wir erhalten für die charakteristische Funktion von $\mathbb{P}^X$

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &\overset{\text{c)}}{=} e^{it^\top m}e^{-\frac{1}{2}\sum c_{kk}t_k^2}=\prod_{k=1}^n e^{it_km_k}e^{-\frac{1}{2}c_{kk}t_k^2}\overset{\text{d)}}{=}\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}(t_k)\\ &=\prod_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{it_kx_k}\,\mathrm{d}\mathbb{P}^{X_k}(x_k)\overset{\text{Fub.}}{=}\int_{\mathbb{R}^n}e^{it^\top x}\,\mathrm{d}(\mathbb{P}^{X_1}\otimes\ldots\otimes\mathbb{P}^{X_n})(x).\end{aligned}$$

Da die charakteristische Funktion das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig bestimmt, folgt schließlich

$$\mathbb{P}^X=\bigotimes_{k=1}^n\mathbb{P}^{X_k},$$

d.h. $X_1,\dots,X_n$ sind stochastisch unabhängig.