Aufgabe 30 b) Sei $(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung, $n \geq 2$. Der Bessel-Prozess ist dann definiert durch

$$R_t := |B_t| = \Big(\sum_{j=1}^{n} |B_t^{(j)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass $(R_t)_{t\geq 0}$ die stochastische Bessel-Gleichung löst, d.h.

$$\mathrm{d}R_t = \frac{n-1}{2R_t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{R_t} B_t \cdot \mathrm{d}B_t.$$

Lösung: Da $|\cdot| \notin C^2(\mathbb{R}^n)$, können wir hier nicht direkt die Itô-Formel anwenden. Wir umgehen dieses Problem, indem wir eine passende Approximation wählen.

Sei $g(y) := \sqrt{y}$. Dann gilt $R_t = g(V_t)$, mit $V_t = R_t^2$. Zu g definieren wir für $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon(y) := \begin{cases} \frac{3}{8}\sqrt{\varepsilon} + \frac{3}{4\sqrt{\varepsilon}} y - \frac{1}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} y^2, & \text{für } y < \varepsilon, \\ \sqrt{y}, & \text{für } y \geq \varepsilon, \end{cases}$$

wobei die erste Zeile einfach als ganzrationale Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ gewählt wurde mit $f(\varepsilon) = g(\varepsilon), f'(\varepsilon) = g'(\varepsilon)$ und $f''(\varepsilon) = g''(\varepsilon)$. Dann ist $g_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$ (per Konstruktion) und $g_\varepsilon(y) \searrow g(y)$ für $\varepsilon \to 0$ und alle $y \geq 0$. Außerdem gilt

$$g_\varepsilon'(y) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} y, & \text{für } y < \varepsilon, \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{für } y \geq \varepsilon, \end{cases}$$

$$g_\varepsilon''(y) = \begin{cases} -\frac{1}{4\varepsilon^{3/2}}, & \text{für } y < \varepsilon, \\ -\frac{1}{4y^{3/2}}, & \text{für } y \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Wenden wir nun die Itô-Formel auf g_ε an, so erhalten wir

$$g_\varepsilon(V_t) = \frac{3}{8}\sqrt{\varepsilon} + \int_0^t g_\varepsilon'(V_s)\,\mathrm{d}V_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_\varepsilon''(V_s)(\,\mathrm{d}V_s)(\,\mathrm{d}V_s).$$

In Teil a) haben wir gezeigt, dass $\mathrm{d}V_t = n\,\mathrm{d}t + 2B_t \cdot \mathrm{d}B_t$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
g_\varepsilon(V_t) &= \frac{3}{8}\sqrt{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \Big[\mathbb{1}_{\{V_s\geq\varepsilon\}} \frac{1}{\sqrt{V_s}} + \mathbb{1}_{\{V_s<\varepsilon\}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\Big(3 - \frac{V_s}{\varepsilon}\Big)\Big] B_s^{(j)}\,\mathrm{d}B_s^{(j)} \\
&\quad + \int_0^t \mathbb{1}_{\{V_s\geq\varepsilon\}} \Big(\frac{n}{2\sqrt{V_s}} - \frac{1}{2}\frac{1}{4V_s^{3/2}} 4|B_t|^2\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \mathbb{1}_{\{V_s<\varepsilon\}} \Big(\frac{3n}{4\sqrt{\varepsilon}} - \frac{n}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} V_s - \frac{1}{2}\frac{1}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} 4|B_t|^2\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{3}{8}\sqrt{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_0^t \Big[\mathbb{1}_{\{V_s\geq\varepsilon\}} \frac{1}{R_s} + \mathbb{1}_{\{V_s<\varepsilon\}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\Big(3 - \frac{V_s}{\varepsilon}\Big)\Big] B_s^{(j)}\,\mathrm{d}B_s^{(j)}}_{=: I_t^{(j)}(\varepsilon)} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^t \mathbb{1}_{\{V_s\geq\varepsilon\}} \frac{n-1}{2R_s}\,\mathrm{d}s}_{=: J_t(\varepsilon)} + \underbrace{\int_0^t \mathbb{1}_{\{V_s<\varepsilon\}} \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\Big(3n - (n+2)\frac{V_s}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}s}_{=: K_t(\varepsilon)} \\
&= \frac{3}{8}\sqrt{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} I_t^{(j)}(\varepsilon) + J_t(\varepsilon) + K_t(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Als Nächstes betrachten wir die einzelnen Summanden separat:

1) Mit monotoner Konvergenz erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_t(\varepsilon) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{V_s > 0\}} \frac{n-1}{2R_s} \,\mathrm{d}s \overset{\text{A10 b)}}{=} \int_0^t \frac{n-1}{2R_s} \,\mathrm{d}s \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

2.1) Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_s < \varepsilon) \leq \mathbb{P}\big(B_s^{(1)^2} + B_s^{(2)^2} < \varepsilon\big) &= \frac{1}{2\pi s} \int_{B(0,\sqrt{\varepsilon})} \exp(-\tfrac{1}{2s}|x|^2) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} r \exp(-\tfrac{1}{2s} r^2) \,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Dann folgt mit Fubini

$$\int_0^t \mathbb{P}(V_s < \varepsilon) \,\mathrm{d}s \leq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \frac{r}{s} \exp(-\tfrac{1}{2s} r^2) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}r \overset{\xi = \frac{1}{2s} r^2}{=} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\frac{r^2}{2t}}^{\infty} \frac{r}{\xi} e^{-\xi} \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}r,$$

und mit L'Hospital erhalten wir schließlich

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \mathbb{P}(V_s < \varepsilon) \,\mathrm{d}s \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} \int_{\frac{\varepsilon}{2t}}^{\infty} \xi^{-1/2} e^{-\xi} \,\mathrm{d}\xi = 0,$$

da $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\frac{\varepsilon}{2t}}^{\infty} \xi^{-1/2} e^{-\xi} \,\mathrm{d}\xi = \Gamma(\frac{1}{2}) < \infty$.

2.2) Damit folgt nun zum einen

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} K_t(\varepsilon) \leq \frac{3n}{4} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \mathbb{P}(V_s < \varepsilon) \,\mathrm{d}s = 0,$$

und zum anderen folgt mit der Itô-Isometrie

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \Big| \int_0^t \frac{B_s^{(j)}}{R_s} \,\mathrm{d}B_s^{(j)} - I_t^{(j)}(\varepsilon) \Big|^2 &= \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{1}_{\{V_s < \varepsilon\}} \Big| \frac{1}{R_s} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \Big(3 - \frac{V_s}{\varepsilon}\Big) \Big|^2 B_s^{(j)^2} \,\mathrm{d}s \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \mathbb{1}_{\{V_s < \varepsilon\}} \underbrace{\Big[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_s}{\varepsilon}} \Big(3 - \frac{V_s}{\varepsilon}\Big)\Big]^2}_{\leq 1} \underbrace{\frac{B_s^{(j)^2}}{R_s^2}}_{\leq 1} \,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t \mathbb{P}(V_s < \varepsilon) \,\mathrm{d}s \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Für geeignet gewählte Teilfolgen erhalten wir also $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned} R_t = g(V_t) = \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(V_t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\frac{3}{8} \sqrt{\varepsilon} + \sum_{j=1}^n I_t^{(j)}(\varepsilon) + J_t(\varepsilon) + K_t(\varepsilon) \Big) \\ &= \int_0^t \frac{n-1}{2R_s} \,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{B_s^{(j)}}{R_s} \,\mathrm{d}B_s^{(j)} \\ &= \int_0^t \frac{n-1}{2R_s} \,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{R_s} B_s \cdot \mathrm{d}B_s. \end{aligned}$$